# F-SEMI 定期試験対策【複素数と方程式】(1枚目 / 2枚中)

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ (1)　$(与式)=\dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^3}{8}=\dfrac{-1+3\sqrt{3}\,i-3(\sqrt{3}\,i)^2+(\sqrt{3}\,i)^3}{8}$

$=\dfrac{-1+3\sqrt{3}\,i+9-3\sqrt{3}\,i}{8}=\dfrac{8}{8}=1$

(2)　$(与式)=-\dfrac{(1+3i)(3+2i)}{(3-i)(1-5i)}=-\dfrac{3+2i+9i+6i^2}{3-15i-i+5i^2}=\dfrac{-3+11i}{2(1+8i)}$

$=\dfrac{(-3+11i)(1-8i)}{2(1+8i)(1-8i)}=\dfrac{-3+24i+11i-88i^2}{2(1-64i^2)}=\dfrac{85+35i}{2\cdot 65}$

$=\dfrac{17+7i}{26}=\dfrac{17}{26}+\dfrac{7}{26}i$

$\boxed{2}$ 左辺を整理すると　$(2x-3y)+(x+6y)i=15$

$2x-3y$，$x+6y$ は実数であるから　$2x-3y=15$　かつ　$x+6y=0$

これを解いて　$x=6$，$y=-1$

$\boxed{3}$ (1)　この2次方程式の判別式を $D$ とすると

$D=a^2-4\cdot 1\cdot(a+8)=a^2-4a-32=(a+4)(a-8)$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$ すなわち $a<-4$，$8<a$ のとき　異なる2つの実数解

$D=0$ すなわち $a=-4$，$8$ のとき　重解

$D<0$ すなわち $-4<a<8$ のとき　異なる2つの虚数解

(2)　$kx^2+4x+3=0$　……①

[1]　$k=0$ のとき

①は　$4x+3=0$　　よって　$x=-\dfrac{3}{4}$

ゆえに，ただ1つの実数解をもつ。

[2]　$k\neq 0$ のとき

①は2次方程式であり，その判別式を $D$ とすると

$\dfrac{D}{4}=2^2-k\cdot 3=4-3k$

①がただ1つの実数解をもつのは，重解をもつときで

$D=0$　すなわち　$4-3k=0$

よって　$k=\dfrac{4}{3}$　　これは $k\neq 0$ を満たす。

重解は　$x=-\dfrac{4}{2\cdot k}=-\dfrac{2}{k}=-2\div\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3}{2}$

[1]，[2] から　$k=0$ のとき，実数解 $x=-\dfrac{3}{4}$

$k=\dfrac{4}{3}$ のとき，実数解 $x=-\dfrac{3}{2}$

$\boxed{4}$ 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=5$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=5\cdot 2=10$

(2)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot 5=-16$

(3)　$\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{2^3-3\cdot 5\cdot 2}{5}=-\dfrac{22}{5}$

(4)　$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

ここで　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot 5=-6$

よって　$\alpha^4+\beta^4=(-6)^2-2\cdot 5^2=-14$

$\boxed{5}$ $3-i$ が $x^2+px+q=0$ の解であるから　$(3-i)^2+p(3-i)+q=0$

よって　$(9-6i-1)+p(3-i)+q=0$

整理して　$(3p+q+8)-(p+6)i=0$

$3p+q+8$，$-(p+6)$ は実数であるから　$3p+q+8=0$，$-(p+6)=0$

これを解いて　$p=-6$，$q=10$

$\boxed{6}$ 2つの解を $\alpha$，$\alpha+5$ とおく。

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+5)=-k$，$\alpha(\alpha+5)=24$

すなわち　$2\alpha+5=-k$ ……①，　$\alpha^2+5\alpha-24=0$ ……②

②から　$(\alpha+8)(\alpha-3)=0$　　よって　$\alpha=-8$，$3$

$\alpha=-8$ のとき，①から　$k=-\{2\cdot(-8)+5\}=11$

2つの解は　$-8$，$-3$

$\alpha=3$ のとき，①から　$k=-(2\cdot 3+5)=-11$

2つの解は　3，8

$\boxed{7}$ (1)　$5x^2-2x+1=0$ を解くと　$x=\dfrac{1\pm 2i}{5}$

よって　$5x^2-2x+1=5\left(x-\dfrac{1+2i}{5}\right)\left(x-\dfrac{1-2i}{5}\right)$

(2)　$x^4-7x^2-18=(x^2)^2-7x^2-18=(x^2+2)(x^2-9)$

$=(x^2+2)(x+3)(x-3)$

$x^2+2=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{2}\,i$

ゆえに　$x^2+2=(x+\sqrt{2}\,i)(x-\sqrt{2}\,i)$

よって　$(与式)=(x+\sqrt{2}\,i)(x-\sqrt{2}\,i)(x+3)(x-3)$

$\boxed{8}$ $4x^2+5x+2=0$ の2つの解が $\alpha$，$\beta$ であるから

$\alpha+\beta=-\dfrac{5}{4}$，　$\alpha\beta=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(-\dfrac{5}{4}\right)^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{5}{4}\right)$

$=-\dfrac{125}{64}+\dfrac{15}{8}=-\dfrac{5}{64}$

$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

したがって，$\alpha^3$ と $\beta^3$ を解とする2次方程式の1つは

$x^2+\dfrac{5}{64}x+\dfrac{1}{8}=0$　　よって　$64x^2+5x+8=0$

$\boxed{9}$ (1)　$P(x)=x^3+2x^2-2x-1$ とする。

求める余りは　$P(1)=1+2-2-1=0$

(2)　$P(x)=3x^4-8x^3-5x^2+12$ とする。

求める余りは　$P\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{16}{27}-\dfrac{64}{27}-\dfrac{20}{9}+12=8$

$\boxed{10}$ $x^2-2mx+m+6=0$　……①

①の判別式を $D$ とし，2つの解を $\alpha$，$\beta$ とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2m$，$\alpha\beta=m+6$

(1)　①が異なる2つの負の解をもつための必要十分条件は

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}=(-m)^2-(m+6)>0 & \cdots\cdots② \\ \alpha+\beta<0 & \cdots\cdots③ \\ \alpha\beta>0 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

の3つが同時に成り立つことである。

②から　$m^2-m-6>0$　　ゆえに　$(m+2)(m-3)>0$

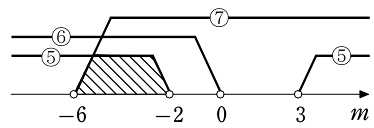
よって　$m<-2$，$3<m$　……⑤

③から　$2m<0$

よって　$m<0$　……⑥

④から　$m+6>0$

よって　$m>-6$　……⑦




⑤，⑥，⑦の共通範囲を求めて　$-6<m<-2$

(2)　①の2つの解が異符号であるための必要十分条件は

$\alpha\beta<0$　すなわち　$m+6<0$

これを解いて　$m<-6$

(3)　①がともに1より大きい異なる2つの解をもつための必要十分条件は

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}=(-m)^2-(m+6)>0 & \cdots\cdots⑧ \\ (\alpha-1)+(\beta-1)>0 & \cdots\cdots⑨ \\ (\alpha-1)(\beta-1)>0 & \cdots\cdots⑩\end{cases}$$

の3つが同時に成り立つことである。

⑧から　$m<-2$，$3<m$　……⑪

⑨から　$(\alpha+\beta)-2>0$

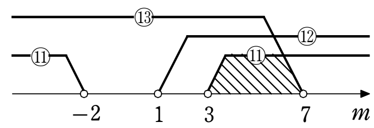
ゆえに　$2m-2>0$

よって　$m>1$　……⑫

⑩から　$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

ゆえに　$m+6-2m+1>0$

よって　$m<7$　……⑬




⑪，⑫，⑬の共通範囲を求めて　$3<m<7$

$\boxed{参考}$ [2次関数のグラフを利用した解法]

$f(x)=x^2-2mx+m+6$ とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=m$

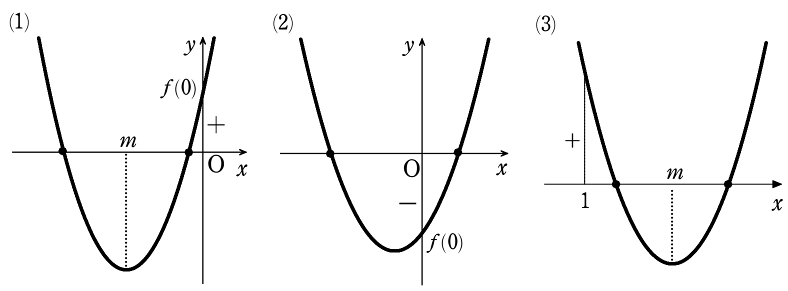
(1)，(2)，(3) の解をもつための必要十分条件は，それぞれ

(1)　$D>0$，$f(0)>0$，軸について $m<0$

(2)　$f(0)<0$

(3)　$D>0$，$f(1)>0$，軸について $m>1$

これから，(1)　$-6<m<-2$　(2)　$m<-6$　(3)　$3<m<7$　が得られる。



**11** (1)　$P(x)$ を $x^2+4x-5$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x^2+4x-5)Q(x)+ax+b$$

すなわち　$P(x)=(x-1)(x+5)Q(x)+ax+b$

条件から　$P(1)=9$　かつ　$P(-5)=-3$

よって　$\begin{cases} a+b=9 \\ -5a+b=-3 \end{cases}$

これを解いて　$a=2$，$b=7$　　したがって，求める余りは　$2x+7$

(2)　$2x^{99}+5$ を $x^2-1$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$2x^{99}+5=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

すなわち　$2x^{99}+5=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$　……①

① の両辺に $x=-1$ を代入して　$2\cdot(-1)^{99}+5=-a+b$

よって　$-a+b=3$　……②

① の両辺に $x=1$ を代入して　$2\cdot 1^{99}+5=a+b$

よって　$a+b=7$　……③

②，③ から　$a=2$，$b=5$　　したがって，求める余りは　$2x+5$

**12** (1)　$P(x)=x^3+4x^2-3x-18$ とすると　$P(2)=8+16-6-18=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x-2)(x^2+6x+9)=(x-2)(x+3)^2$

$$\begin{array}{r} x^2+6x+9 \\ x-2\;\big)\;\overline{x^3+4x^2-\;3x-18} \\ \underline{x^3-2x^2\phantom{-3x-18}} \\ 6x^2-\;3x\phantom{-18} \\ \underline{6x^2-12x\phantom{-18}} \\ 9x-18 \\ \underline{9x-18} \\ 0 \end{array}$$

(2)　$P(x)=2x^3+9x^2+13x+6$ とすると　$P(-1)=-2+9-13+6=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x+1)(2x^2+7x+6)=(x+1)(x+2)(2x+3)$

$$\begin{array}{r} 2x^2+7x\;+6 \\ x+1\;\big)\;\overline{2x^3+9x^2+13x+6} \\ \underline{2x^3+2x^2\phantom{+13x+6}} \\ 7x^2+13x\phantom{+6} \\ \underline{7x^2\;+7x\phantom{+6}} \\ 6x+6 \\ \underline{6x+6} \\ 0 \end{array}$$

**13** $P(x)$ を $x^2-5x+6$　すなわち $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，

余りを $ax+b$（$a$，$b$ は定数）とすると

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b　……①$$

$P(x)$ を $x^2-3x+2$，$x^2-4x+3$　すなわち $(x-1)(x-2)$，$(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を，それぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とする。

条件から

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)-x+4　……②$$

$$P(x)=(x-1)(x-3)Q_2(x)+3x　……③$$

② から　$P(2)=-2+4=2$

③ から　$P(3)=3\cdot 3=9$

一方，① から　$P(2)=2a+b$，$P(3)=3a+b$

したがって　$2a+b=2$，$3a+b=9$

これを解いて　$a=7$，$b=-12$

ゆえに，求める余りは　$7x-12$

**14** $-1$ が解であるから　$(-1)^3+a(-1)^2+(-1)+b=0$

よって　$a+b=2$　……①

2 が解であるから　$2^3+a\cdot 2^2+2+b=0$

よって　$4a+b=-10$　……②

①，② から　$a=-4$，$b=6$

よって，方程式は　$x^3-4x^2+x+6=0$

この式の左辺は $(x+1)(x-2)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(x-3)=0$$

したがって，他の解は　3

**15** $x=1-\sqrt{5}\,i$ から　$x-1=-\sqrt{5}\,i$

両辺を 2 乗して　$(x-1)^2=-5$

よって　$x^2-2x+6=0$

また，$x^4-4x^3+14x^2-19x+26$ を $x^2-2x+6$ で割ると，商は $x^2-2x+4$，

余りは $x+2$ であるから，次の等式が成り立つ。

$$x^4-4x^3+14x^2-19x+26=(x^2-2x+6)(x^2-2x+4)+x+2$$

よって，$x=1-\sqrt{5}\,i$ のとき，与式の値は　$(1-\sqrt{5}\,i)+2=3-\sqrt{5}\,i$

**16** $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。

このときの余りは，2 次以下の整式または 0 であるから，

$ax^2+bx+c$（$a$，$b$，$c$ は定数）とおける。

よって　$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

更に，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると余りが $4x-5$ であるから

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+4x-5　……①$$

と表される。

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが $-4$ であるから　$P(-2)=-4$

また，① から　$P(-2)=9a-13$

よって　$9a-13=-4$　　ゆえに　$a=1$

したがって，求める余りは　$(x-1)^2+4x-5$　すなわち　$x^2+2x-4$

**別解**　$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5　……①$$

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが $-4$ であるから　$P(-2)=-4$

また，① から　$P(-2)=9Q_1(-2)-13$

よって　$9Q_1(-2)-13=-4$　　ゆえに　$Q_1(-2)=1$

よって，$R(x)$ を整式として

$$Q_1(x)=(x+2)R(x)+1$$

と表される。これを ① に代入して

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)^2\{(x+2)R(x)+1\}+4x-5 \\ &=(x-1)^2(x+2)R(x)+(x-1)^2+4x-5 \\ &=(x-1)^2(x+2)R(x)+x^2+2x-4 \end{aligned}$$

ゆえに，求める余りは　$x^2+2x-4$

**17** $\omega$ は $x^3=1$ の解であるから　$\omega^3=1$

よって　$\omega^3-1=0$　　すなわち　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega \fallingdotseq 1$ であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

(1)　$\omega^{14}+\omega^7+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=1^4\cdot\omega^2+1^2\cdot\omega+1$

$$=\omega^2+\omega+1=0$$

(2)　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}$

ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega+1=-\omega^2$

よって　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

**別解**　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\dfrac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

**18** (解 1)　$2+i$ が解であるから　$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)-10=0$

整理して　$3a+2b-8+(4a+b+11)i=0$

$3a+2b-8$，$4a+b+11$ は実数であるから

$$3a+2b-8=0,\ 4a+b+11=0$$

これを解いて　$a=-6$，$b=13$

このとき，方程式は　$x^3-6x^2+13x-10=0$

左辺を因数分解すると　$(x-2)(x^2-4x+5)=0$

これを解いて　$x=2$，$2\pm i$

したがって，他の解は　2，$2-i$

(解 2)　方程式の係数は実数であるから，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

よって，方程式の左辺は $\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$　すなわち　$x^2-4x+5$ で割り切れる。

左辺 $x^3+ax^2+bx-10$ を $x^2-4x+5$ で割ると，

商は　$x+a+4$，　余りは　$(4a+b+11)x-5(a+6)=0$

余りが 0 であるとき　$4a+b+11=0$，$-5(a+6)=0$

よって　$a=-6$，$b=13$

このとき，方程式は　$(x^2-4x+5)(x-2)=0$　　これを解いて　$x=2$，$2\pm i$

したがって，他の解は　2，$2-i$

**参考**「3 次方程式の解と係数の関係」を利用して，次のように解くこともできる。

方程式の係数は実数であるから，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

もう 1 つの解を $p$ とすると，解と係数の関係により

$$p+(2+i)+(2-i)=-a$$

$$(2+i)p+(2-i)p+(2+i)(2-i)=b$$

$$(2+i)(2-i)p=10$$

これを解いて　$p=2$，$a=-6$，$b=13$

したがって，他の解は　2，$2-i$

19 (1) 左辺を因数分解すると　$(3x-2)(9x^2+6x+4)=0$

よって　$3x-2=0$　または　$9x^2+6x+4=0$

ゆえに　$x=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{3}$

(2) $P(x)=x^3-5x^2+4$ とすると　$P(1)=1-5+4=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$P(x)=(x-1)(x^2-4x-4)$

$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$x^2-4x-4=0$

したがって　$x=1$, $2\pm2\sqrt{2}$

(3) $P(x)=x^4-3x^3-x^2-3x+18$ とすると　$P(2)=16-24-4-6+18=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$P(x)=(x-2)(x^3-x^2-3x-9)$

$Q(x)=x^3-x^2-3x-9$ とすると　$Q(3)=27-9-9-9=0$

よって，$Q(x)$ は $x-3$ で割り切れるから，$Q(x)$ を因数分解すると

$Q(x)=(x-3)(x^2+2x+3)$

ゆえに　$P(x)=(x-2)(x-3)(x^2+2x+3)$

$P(x)=0$ から　$x-2=0$　または　$x-3=0$　または　$x^2+2x+3=0$

したがって　$x=2$, $3$, $-1\pm\sqrt{2}\,i$

(4) $P(x)=2x^4+5x^3+5x^2-2$ とすると

$P(-1)=2(-1)^4+5(-1)^3+5(-1)^2-2=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 5 & 5 & 0 & -2 & -1 \\ & -2 & -3 & -2 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & 2 & -2 & 0 & \end{array}$$

ゆえに　$P(x)=(x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)$

また，$Q(x)=2x^3+3x^2+2x-2$ とすると

$Q\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\cdot\dfrac{1}{2}-2=0$

よって，$Q(x)$ は $x-\dfrac{1}{2}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 4 & 4 & 0 & \end{array}$$

ゆえに　$Q(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+4x+4)$

$=(2x-1)(x^2+2x+2)$

よって　$(x+1)(2x-1)(x^2+2x+2)=0$

ゆえに　$x+1=0$　または　$2x-1=0$　または　$x^2+2x+2=0$

$x+1=0$ から　$x=-1$

$2x-1=0$ から　$x=\dfrac{1}{2}$

$x^2+2x+2=0$ から　$x=-1\pm i$

したがって　$x=-1$, $\dfrac{1}{2}$, $-1\pm i$

20

$$\begin{aligned} x^3+(a-4)x-2a &= (x-2)a+x^3-4x=(x-2)a+x(x^2-4) \\ &= (x-2)a+x(x+2)(x-2)=(x-2)\{a+x(x+2)\} \\ &= (x-2)(x^2+2x+a) \end{aligned}$$

よって，方程式は　$(x-2)(x^2+2x+a)=0$　…… ①

ゆえに　$x-2=0$　または　$x^2+2x+a=0$ …… ②

① が 2 重解をもつのは，次の [1], [2] のどちらかの場合である。

[1] ② の 1 つの解が 2 で，他の解が 2 でない。

② が 2 を解にもつから　$2^2+2\cdot2+a=0$　　よって　$a=-8$

このとき，② は　$(x-2)(x+4)=0$

解は $x=2$, $-4$ となり，適する。

[2] ② が 2 以外の重解をもつ。

② の判別式を $D$ とすると，$D=0$ が成り立つ。

すなわち　$2^2-4\cdot1\cdot a=0$　　よって　$a=1$

このとき，② の重解は　$x=-\dfrac{2}{2\cdot1}=-1$　(適する)

[1], [2] から，求める $a$ の値は　$a=-8$, $1$

21 解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-7$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-2}{-7}=\dfrac{2}{7}$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(-2)=13$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=3\{13-(-2)\}+3\cdot(-7)=45-21=24$

(4) $x^3-3x^2-2x+7=0$ の 3 つの解が $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ であるから

$x^3-3x^2-2x+7=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$　…… ①

① の両辺に $x=1$ を代入して

$1^3-3\cdot1^2-2\cdot1+7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=3$

別解　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=(1-\beta-\alpha+\alpha\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+(-2)-(-7)=3$

(5) $\alpha+\beta+\gamma=3$ から

$\alpha+\beta=3-\gamma$, $\beta+\gamma=3-\alpha$, $\gamma+\alpha=3-\beta$

したがって

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

① の両辺に $x=3$ を代入して

$3^3-3\cdot3^2-2\cdot3+7=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

よって　$(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=1$

すなわち　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=1$

別解　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

$=(9-3\beta-3\alpha+\alpha\beta)(3-\gamma)$

$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=27-9\cdot3+3\cdot(-2)-(-7)=1$

22 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$ …… ①　とする。

(1) $x=0$ は ① の解でないから　$x\neq0$

① の両辺を $x^2$ で割ると　$x^2-4x+5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

よって　$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

ここで，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ であるから　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$t^2-4t+3=0$

(2) まず，(1) で求めた $t$ の方程式を解く。

$t^2-4t+3=0$ から　$(t-1)(t-3)=0$

よって　$t=1$, $3$

[1] $t=1$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=1$

よって　$x^2-x+1=0$

ゆえに　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

[2] $t=3$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=3$

よって　$x^2-3x+1=0$

ゆえに　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

[1], [2] から，① の解は

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$