F-SEMI 定期試験対策【軌跡・領域】

氏名：

1 Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

(1) 条件より，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}$ であるから　$\mathrm{OP}^2=\mathrm{AP}^2$

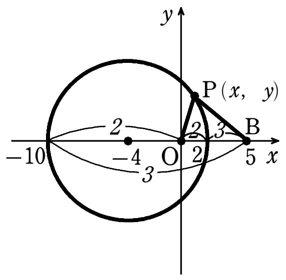
よって　$x^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2$

整理すると　$6x+4y=13$

逆に，直線 $6x+4y=13$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}$ を満たす。

ゆえに，求める軌跡は　直線 $6x+4y=13$

(2) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。



Pの満たす条件は　$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:3$

すなわち　$3\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$

よって　$9\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

これを座標で表すと

$$9(x^2+y^2)=4\{(x-5)^2+y^2\}$$

整理すると　$x^2+y^2+8x-20=0$

すなわち　$(x+4)^2+y^2=6^2$　……①

ゆえに，条件を満たす点は円①上にある。

逆に，円①上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　中心 $(-4,\ 0)$，半径6の円

(3) 点Pの座標を $(s,\ t)$ とし，線分APを $2:1$ に内分する点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とする。

Pは円 $x^2+y^2=9$ 上の点であるから　$s^2+t^2=9$　……①

Qは線分APを $2:1$ に内分する点であるから

$$x=\frac{1+2s}{3},\ y=\frac{2+2t}{3}\qquad \text{よって}\qquad s=\frac{3x-1}{2},\ t=\frac{3y-2}{2}$$

これを①に代入すると　$\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3y-2}{2}\right)^2=9$

ゆえに　$\dfrac{9}{4}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{9}{4}\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=9$

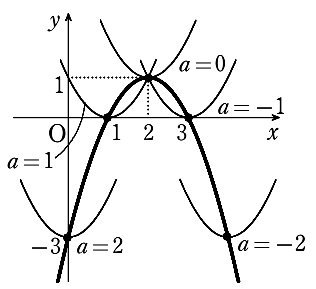
よって　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=4$　……②

したがって，点Qは円②上にある。

逆に，円②上の任意の点は，条件を満たす。

以上から，求める軌跡は　中心 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，半径2の円

2 放物線の方程式を変形すると



$$y=\{x+(a-2)\}^2-a^2+1$$

放物線の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$x=-a+2$　……①

$y=-a^2+1$　……②

①から　$a=-x+2$

これを②に代入して

$y=-(-x+2)^2+1$

したがって，求める曲線の方程式は

$y=-(x-2)^2+1$ (放物線)

3 $\ell:tx-y=t$ ……①，$m:x+ty=2t+1$ ……② とする。

①から　$t(x-1)=y$　……③

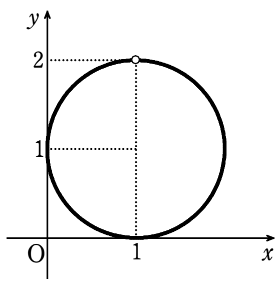
②から　$t(y-2)=1-x$　……④

[1] $y\neq 2$ のとき

④から　$t=\dfrac{1-x}{y-2}$　　③に代入して　$\dfrac{(1-x)(x-1)}{y-2}=y$

両辺に $y-2$ を掛けて整理すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ (ただし $y\neq 2$)

[2] $y=2$ のとき



④から　$x=1$

$x=1$，$y=2$ のとき，③は $t\cdot 0=2$ となり，これを満たす t は存在しない。

すなわち，交点Pが点 $(1,\ 2)$ となることはない。

以上から，求める図形の方程式は

円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　ただし，点 $(1,\ 2)$ を除く。

また，交点Pの描く図形は右の図のようになる。

4 (1) $y=x^2-3x$ ……①，$y=m(x-4)$ ……② とする。

①，②から y を消去して整理すると　$x^2-(m+3)x+4m=0$　……③

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(m+3)^2-4\cdot 1\cdot 4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$$

放物線①と直線②が異なる2点A，Bで交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$(m-1)(m-9)>0$

よって　$m<1,\ 9<m$　……④

(2) A，Bの x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。

α，β は③の異なる2つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+3$$

線分ABの中点Pの座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+3}{2}\quad\text{……⑤}\qquad Y=m(X-4)\quad\text{……⑥}$$

⑤から　$m=2X-3$　……⑦

これを⑥に代入して　$Y=(2X-3)(X-4)$

よって　$Y=2X^2-11X+12$

また，④，⑦から　$2X-3<1,\ 9<2X-3$　ゆえに　$X<2,\ 6<X$

よって，点Pは放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2,\ 6<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Pの軌跡は　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2,\ 6<x$ の部分

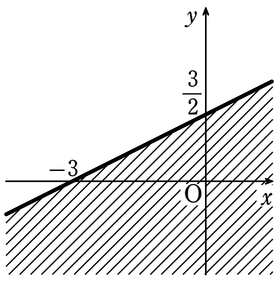
$\boxed{5}$ (1)　不等式を変形すると　　$y \leqq \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

よって，求める領域は直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ およびその下側で，図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

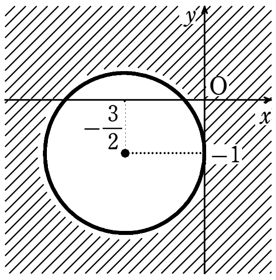
(2)　不等式を変形すると　　$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2>\frac{9}{4}$

よって，求める領域は円 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{9}{4}$ の外部で，図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(1)



(2)



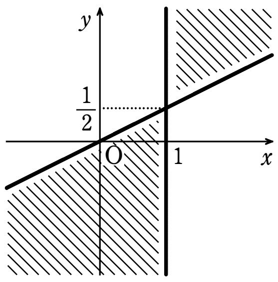
(3)　$(x-1)(x-2y)<0$ から

$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2y<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x-1<0 \\ x-2y>0 \end{cases}$

すなわち

$\begin{cases} x>1 \\ y>\frac{x}{2} \end{cases}$ ……[A]　または　$\begin{cases} x<1 \\ y<\frac{x}{2} \end{cases}$ ……[B]

求める領域は，[A] の表す領域と [B] の表す領域の和集合である。



よって，求める領域は図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(4)　$(x-y)(x^2+y^2-1) \geqq 0$ から

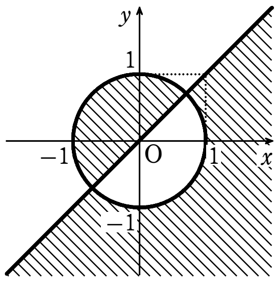
$\begin{cases} x-y \geqq 0 \\ x^2+y^2-1 \geqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x-y \leqq 0 \\ x^2+y^2-1 \leqq 0 \end{cases}$

すなわち

$\begin{cases} y \leqq x \\ x^2+y^2 \geqq 1 \end{cases}$ ……[A]

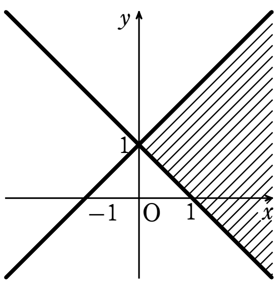
または　$\begin{cases} y \geqq x \\ x^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$ ……[B]

求める領域は，[A] の表す領域と [B] の表す領域の和集合である。



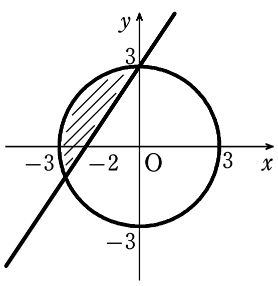
よって，求める領域は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(5)　求める領域は，直線 $y=x+1$ およびその下側と，直線 $y=-x+1$ およびその上側の共通部分で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(6)　$2y-3x>6$ から　　$y>\frac{3}{2}x+3$

よって，求める領域は，直線 $y=\frac{3}{2}x+3$ の上側と円 $x^2+y^2=9$ の内部の共通部分で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



(7)　$|x-y|>1$ から　　$x-y<-1$ または $1<x-y$

すなわち　　$y>x+1$ または $y<x-1$

よって，求める領域は [図] の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(8)　$|x|+|y| \leqq 1$ ……①

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，① は　　$x+y \leqq 1$　　よって　$y \leqq -x+1$

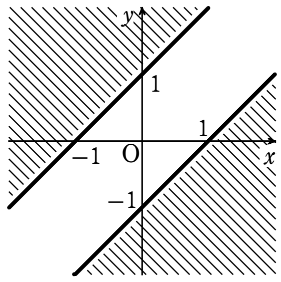
$x \geqq 0$，$y<0$ のとき，① は　　$x-y \leqq 1$　　よって　$y \geqq x-1$

$x<0$，$y \geqq 0$ のとき，① は　　$-x+y \leqq 1$　　よって　$y \leqq x+1$

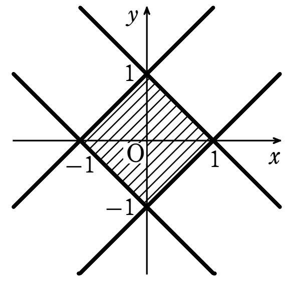
$x<0$，$y<0$ のとき，① は　　$-x-y \leqq 1$　　よって　$y \geqq -x-1$

ゆえに，求める領域は [図] の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(1)



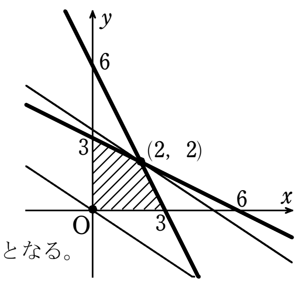
(2)



$\boxed{6}$　2 直線 $2x+y=6$，$x+2y=6$ の交点の座標は

$(2,\ 2)$

与えられた 4 つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$2x+3y=k$ ……① とおくと，① は傾きが $-\frac{2}{3}$，

y 切片が $\frac{k}{3}$ の直線を表す。

図から，直線 ① が点 $(2,\ 2)$ を通るとき k の値は最大となる。

このとき　　$k=2 \cdot 2+3 \cdot 2=10$

また，直線 ① が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　　$k=0$

よって，$2x+3y$ は

$x=2$，$y=2$ のとき最大値 10，$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

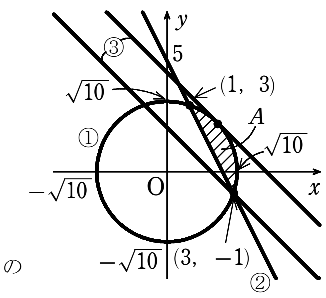
をとる。

$\boxed{7}$　$x^2+y^2=10$ ……①，$y=-2x+5$ ……② とする。

連立方程式 ①，② を解くと

$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ -1)$

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 10$，$y \geqq -2x+5$ の表す領域 A は図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$x+y=k$ ……③

とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

図から，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大になる。

①，③ を連立して　$x^2+(k-x)^2=10$　　整理して　$2x^2-2kx+k^2-10=0$ ……④

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線 ③ が円 ① に接するための条件は

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=0$　　これを解いて　　$k=\pm 2\sqrt{5}$

第 1 象限では $x>0$，$y>0$ であるから，③ より $k>0$ で　　$k=2\sqrt{5}$

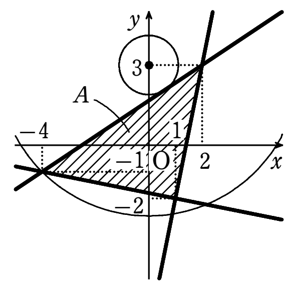
このとき，④ の重解は　$x=-\frac{-2 \cdot 2\sqrt{5}}{2 \cdot 2}=\sqrt{5}$　　③ から　$y=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

次に，直線 ② の傾きは -2，直線 ③ の傾きは -1 で，$-2<-1$ であるから，図より，k の値が最小となるのは，直線 ③ が点 $(3,\ -1)$ を通るときである。

このとき，k の値は　　$3+(-1)=2$

よって　　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

$\boxed{8}$　領域 A は，3 点 $(2,\ 3)$，$(1,\ -2)$，$(-4,\ -1)$ を頂点とする三角形の周および内部である。



$x^2+y^2-6y=k$ とおくと

$x^2+(y-3)^2=k+9$ ……①

$k+9>0$ のとき，① は中心 $(0,\ 3)$，半径 $\sqrt{k+9}$ の円を表す。

x^2+y^2-6y の値の範囲は，円 ① が領域 A と共有点をもつような k の値の範囲である。

図から，円 ① が点 $(-4,\ -1)$ を通るとき，k は最大になり，その値は　　$k=(-4)^2+(-1)^2-6 \cdot (-1)=23$

また，円 ① が直線 $2x-3y+5=0$ ……② に接するとき，k は最小になる。

①，② から x を消去して整理すると

$13y^2-54y+25-4k=0$ ……③

円 ① が直線 ② に接するための条件は，判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(-27)^2-13(25-4k)=0$　　これを解いて　　$k=-\frac{101}{13}$

このとき，③ の重解は　　$y=-\frac{-54}{2 \cdot 13}=\frac{27}{13}$

よって，② から　　$x=\frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{27}{13}-5\right)=\frac{8}{13}$

したがって　　$x=-4$，$y=-1$ のとき最大値 23

$x=\frac{8}{13}$，$y=\frac{27}{13}$ のとき最小値 $-\frac{101}{13}$