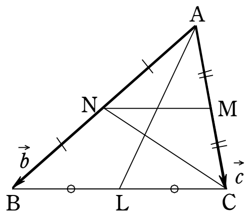
F-SEMI 定期試験対策【平面ベクトル】(1枚目 / 2枚目)　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点＿＿＿＿点

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{b}$



(2) $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

$\boxed{2}$ $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(11,\ 10)=s(1,\ 2)+t(2,\ 1)$

よって　$(11,\ 10)=(s+2t,\ 2s+t)$

ゆえに　$\begin{cases} s+2t=11 \\ 2s+t=10 \end{cases}$　　よって　$s=3,\ t=4$　　ゆえに　$\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}$

$\boxed{3}$ $2\vec{a}+\vec{b}=2(2,\ x)+(x+1,\ 3)=(4,\ 2x)+(x+1,\ 3)=(x+5,\ 2x+3)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(2,\ x)-2(x+1,\ 3)=(2,\ x)-(2x+2,\ 6)=(-2x,\ x-6)$

(1) $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b})$ となるのは，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$ のときである。

よって　　$(x+5)\times(-2x)+(2x+3)\times(x-6)=0$

整理すると　　$-19x-18=0$　　　これを解いて　　$x=-\frac{18}{19}$

(2) $(2\vec{a}+\vec{b})/\!/(\vec{a}-2\vec{b})$ であるには，$2\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ を満たす実数 k があればよい。

よって　　$(x+5,\ 2x+3)=k(-2x,\ x-6)$

ゆえに　　$x+5=-2kx$　……①，　$2x+3=k(x-6)$　……②

② の両辺に $-2x$ を掛けて　　$-2x(2x+3)=-2kx(x-6)$

これに ① を代入すると　　$-2x(2x+3)=(x+5)(x-6)$

整理して　　$x^2+x-6=0$　　　ゆえに　　$(x+3)(x-2)=0$

よって　　$x=-3,\ 2$

[1]　$x=-3$ のとき　　① から　$k=\frac{1}{3}$ (実数)

[2]　$x=2$ のとき　　① から　$k=-\frac{7}{4}$ (実数)

したがって　　$x=-3,\ 2$

$\boxed{4}$ A$(5,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(2,\ 5)$ とし，求める頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，平行四辺形の頂点の順序は，次の 3 つの場合がある。

[1]　ABCD　　[2]　ABDC　　[3]　ADBC

[1] のとき　　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

よって　　$(x-5,\ y-1)=(2-1,\ 5-2)$

ゆえに　　$x-5=1,\ y-1=3$　　　したがって　　$x=6,\ y=4$

[2] のとき　　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

よって　　$(2-5,\ 5-1)=(x-1,\ y-2)$

ゆえに　　$-3=x-1,\ 4=y-2$　　　したがって　　$x=-2,\ y=6$

[3] のとき　　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$

よって　　$(-3,\ 4)=(1-x,\ 2-y)$

ゆえに　　$-3=1-x,\ 4=2-y$　　　したがって　　$x=4,\ y=-2$

以上から　　$(6,\ 4)$ または $(-2,\ 6)$ または $(4,\ -2)$

$\boxed{5}$ $\vec{a}+t\vec{b}=(10,\ 5)+t(1,\ 2)=(10+t,\ 5+2t)$ であるから

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(10+t)^2+(5+2t)^2=5t^2+40t+125$

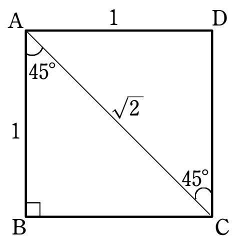
$=5(t^2+8t+4^2)-5\cdot4^2+125=5(t+4)^2+45$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-4$ のとき最小値 45 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって　　$t=-4$ のとき最小値 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ (1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は　45°



よって　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos45^\circ$

$=1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は　90°

よって　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos90^\circ=0$

(3) $\overrightarrow{CB}$ と $\overrightarrow{DA}$ のなす角は　0°

よって　　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{DA}|\cos0^\circ=1\cdot1\cdot1=1$

(4) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{DC}$ のなす角は　　$90^\circ+45^\circ=135^\circ$

よって　　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DC}|\cos135^\circ=\sqrt{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$

$\boxed{7}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot4+1\cdot(-8)=0$　　　よって　　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=90^\circ$

(2)　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}\cdot1+1\cdot(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

よって　　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=150^\circ$

$\boxed{8}$ (1) $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ から　　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1$　　　よって　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{3}$ を代入して　　$2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=1$

ゆえに　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=30^\circ$

(2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\cdot2^2-12\cdot3+9(\sqrt{3})^2$

$=16-36+27=7$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ であるから　　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$

$\boxed{9}$ $|\vec{a}+\vec{b}|=2$ から　　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=4$　　　よって　　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2$ を代入して　　$2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=4$

ゆえに　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるための条件は　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

よって　　$|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ を代入して　　$2^2+(t+1)\cdot(-2)+t\cdot2^2=0$

ゆえに　　$2t+2=0$　　　したがって　　$t=-1$

$\boxed{10}$ (1) 求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$|\vec{e}|=1$ であるから　　$|\vec{e}|^2=1$　　　よって　　$x^2+y^2=1$　……①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　　$-1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=0$　　　よって　　$x=\sqrt{3}\,y$　……②

これを ① に代入して　　$(\sqrt{3}\,y)^2+y^2=1$

ゆえに　　$y^2=\frac{1}{4}$　　　よって　　$y=\pm\frac{1}{2}$

② から　　$y=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$y=-\frac{1}{2}$ のとき　$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

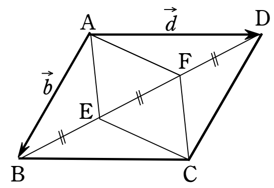
したがって，$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルは　　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$ であるから，求めるベクトルは $\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}$ と $-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}$ で

$\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,\ 3)=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$，

$-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}=-\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,\ 3)=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\boxed{11}$ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると



$\overrightarrow{AE}=\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{1+2}=\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{3}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{\vec{b}+2\vec{d}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{d}}{3}$

$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=(\vec{b}+\vec{d})-\frac{\vec{b}+2\vec{d}}{3}=\frac{2\vec{b}+\vec{d}}{3}$

よって　　$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$

したがって，四角形 AECF は平行四辺形である。

$\boxed{12}$ (1) 点 L，M，N の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ とすると

$\vec{l}=\frac{-4\vec{b}+3\vec{c}}{3-4}=4\vec{b}-3\vec{c}$，　$\vec{m}=\frac{-4\vec{c}+3\vec{a}}{3-4}=4\vec{c}-3\vec{a}$，

$\vec{n}=\frac{-4\vec{a}+3\vec{b}}{3-4}=4\vec{a}-3\vec{b}$

よって　　$\vec{g}=\frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}=\frac{(4\vec{b}-3\vec{c})+(4\vec{c}-3\vec{a})+(4\vec{a}-3\vec{b})}{3}$

$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(2) $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=(\vec{l}-\vec{a})+(\vec{m}-\vec{b})+(\vec{n}-\vec{c})$

$=\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$

13 直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=5:7$

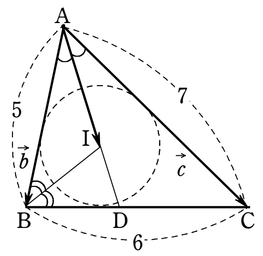
よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5+7}=\dfrac{7}{12}\vec{b}+\dfrac{5}{12}\vec{c}$

また $\mathrm{BD}=\dfrac{5}{5+7}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{12}\times 6=\dfrac{5}{2}$

ゆえに $\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=5:\dfrac{5}{2}=2:1$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{2}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{12}\vec{b}+\dfrac{5}{12}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{7}{18}\vec{b}+\dfrac{5}{18}\vec{c}$



14 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) とおく。

条件から $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ ……①

AH⊥OB であるから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

よって $(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

ゆえに $s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① を代入して $2s+3t-2=0$ ……②

BH⊥OA であるから $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

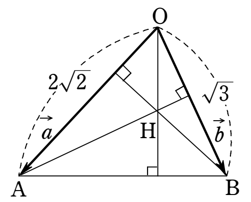
よって $(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

ゆえに $s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① を代入して $8s+2t-2=0$ よって $4s+t-1=0$ ……③

②，③ を解くと $s=\dfrac{1}{10}$，$t=\dfrac{3}{5}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



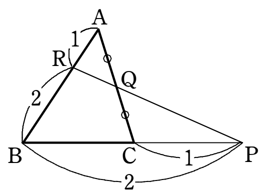
参考 上の解答では，AH⊥OB と BH⊥OA を用いたが，OH⊥AB を用いて求めてもよい。

15 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$



よって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-(-\vec{b}+2\vec{c})=\dfrac{2\vec{b}-3\vec{c}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-(-\vec{b}+2\vec{c})=\dfrac{2(2\vec{b}-3\vec{c})}{3}$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ ……①

したがって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

(2) ① から $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=3:1$

16 (1) $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ から $-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$

$=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$

ゆえに，辺 BC を 4 : 3 に内分する点を Q とすると

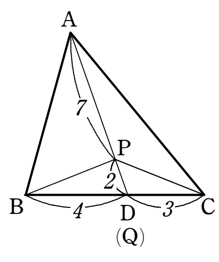
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

よって，3 点 A，P，Q は一直線上にあり

$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=7:2$

すなわち，この点 Q が点 D であり

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=4:3$



(2) (1) から $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ よって $\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=7:2$

(3) $\triangle\mathrm{PBD}:\triangle\mathrm{PCD}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=4:3$

よって，$\triangle\mathrm{PBD}=4S$，$\triangle\mathrm{PCD}=3S$ とおくと

$\triangle\mathrm{PBC}=\triangle\mathrm{PBD}+\triangle\mathrm{PCD}=4S+3S=7S$

また $\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PCD}=\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=7:2$

ゆえに $\triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{7}{2}\triangle\mathrm{PCD}=\dfrac{7}{2}\times 3S=\dfrac{21}{2}S$

更に $\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBD}=\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=7:2$

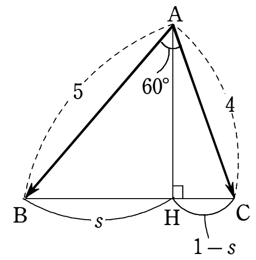
よって $\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{7}{2}\triangle\mathrm{PBD}=\dfrac{7}{2}\times 4S=14S$

したがって $\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=7S:\dfrac{21}{2}S:14S=2:3:4$

17 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると

$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=4$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=5\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}=10$



$\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=s:(1-s)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

すなわち $\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

よって $(s-1)|\vec{b}|^2+(1-2s)\vec{b}\cdot\vec{c}+s|\vec{c}|^2=0$

$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=10$ を代入して

$25(s-1)+10(1-2s)+16s=0$ これを解いて $s=\dfrac{5}{7}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{5}{7}\vec{c}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

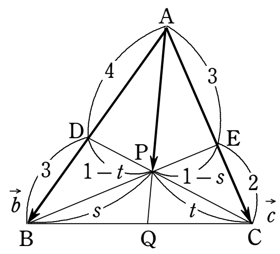
18 (1) $\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=s:(1-s)$，$\mathrm{CP}:\mathrm{PD}=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=(1-s)\vec{b}+\dfrac{3}{5}s\vec{c}$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$ ……②



①，② から $(1-s)\vec{b}+\dfrac{3}{5}s\vec{c}=\dfrac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから $1-s=\dfrac{4}{7}t$，$\dfrac{3}{5}s=1-t$

よって $7s+4t=7$，$3s+5t=5$ これを解いて $s=\dfrac{15}{23}$，$t=\dfrac{14}{23}$

$s=\dfrac{15}{23}$ を ① に代入して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (k は実数) とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}\right)=\dfrac{8}{23}k\vec{b}+\dfrac{9}{23}k\vec{c}$ ……③

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=u:(1-u)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-u)\vec{b}+u\vec{c}$ ……④

③，④ から $\dfrac{8}{23}k\vec{b}+\dfrac{9}{23}k\vec{c}=(1-u)\vec{b}+u\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから $\dfrac{8}{23}k=1-u$，$\dfrac{9}{23}k=u$

これを解いて $k=\dfrac{23}{17}$，$u=\dfrac{9}{17}$

$u=\dfrac{9}{17}$ を ④ に代入して $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{8}{17}\vec{b}+\dfrac{9}{17}\vec{c}$

参考 1 後の項目「ベクトル方程式」で次のことを学習する。

点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線上にある

$\iff$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

このことを利用すると，③ から直ちに k の値を求めることができる。

(別解) 点 Q は辺 BC 上にあるから，③ より

$\dfrac{8}{23}k+\dfrac{9}{23}k=1$ これを解いて $k=\dfrac{23}{17}$

参考 2 (1) の $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めるのにメネラウスの定理，(2) の $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めるのにチェバの定理を利用してもよい。

(1) △ABE と直線 CD について，メネラウスの定理から

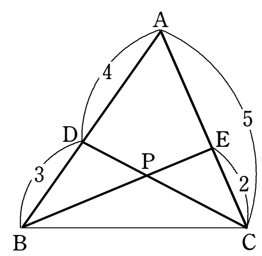
$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$

すなわち $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

よって，BP : PE = 15 : 8 であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+15\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{15+8}=\dfrac{1}{23}\left(8\vec{b}+15\cdot\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}$

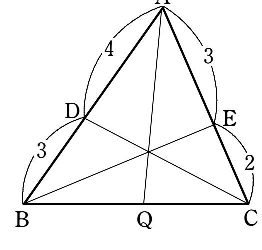


(2) チェバの定理から $\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$

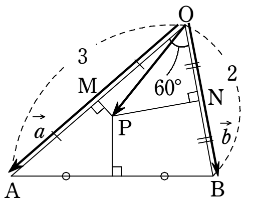
すなわち $\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

よって，BQ : QC = 9 : 8 であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+9\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9+8}=\dfrac{8}{17}\vec{b}+\dfrac{9}{17}\vec{c}$



19 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s, t は実数) とおく。
辺 OA，OB の中点をそれぞれ M，N とすると
PM⊥OA，PN⊥OB



よって　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$　…… ①

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-(s\vec{a}+t\vec{b})$

$=\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\vec{a}-t\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{a}+t\vec{b})=-s\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}$

① から　$\left\{\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\vec{a}-t\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}=0$，$\left\{-s\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}-s\right)|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$-s\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2=0$

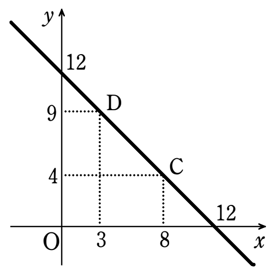
ここで，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60°$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos60°=3$

よって　$3^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}-s\right)-3t=0$，$-3s+2^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}-t\right)=0$

整理すると　$6s+2t=3$，$3s+4t=2$　　これを解いて　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

20 (1)　$3s+4t=12$ の両辺を 12 で割ると　$\dfrac{s}{4}+\dfrac{t}{3}=1$



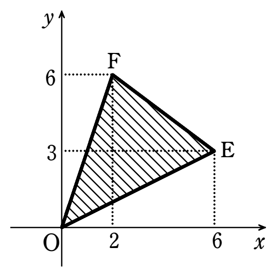
$\dfrac{s}{4}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$ とおくと　$s'+t'=1$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{4}(4\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(4\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 C(8, 4)，D(3, 9) をとると，点 P の存在範囲は直線 CD で，[図] のようになる。

(2)　$2s+3t\leqq6$ の両辺を 6 で割ると　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq1$



$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと　$s'+t'\leqq1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 E(6, 3)，F(2, 6) をとると，点 P の存在範囲は △OEF の周および内部で，[図] の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

21 原点を O，直線上の任意の点を P(x, y)，t を実数とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$ から　$(x,\ y)=(1,\ 2)+t(-6,\ 2)=(1-6t,\ 2+2t)$

よって　$\begin{cases}x=1-6t & \cdots\cdots ①\\ y=2+2t & \cdots\cdots ②\end{cases}$　　①＋②×3 から　$x+3y=7$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から

$(x,\ y)=(1-t)(1,\ 2)+t(3,\ 1)=(1+2t,\ 2-t)$

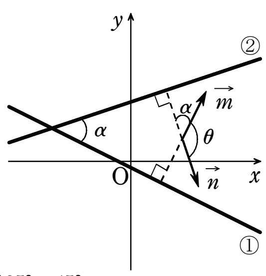
よって　$\begin{cases}x=1+2t & \cdots\cdots ①\\ y=2-t & \cdots\cdots ②\end{cases}$　　①＋②×2 から　$x+2y=5$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y-2)$

よって　$1\times(x-1)+(-2)\times(y-2)=0$　　したがって　$x-2y+3=0$

22 $2x+4y+1=0$ …… ①，$x-3y+7=0$ …… ②　とし、①・②の法線ベクトルのなす角を θ としたとき、



$\vec{m}=(2,\ 4)$，$\vec{n}=(1,\ -3)$ とすると，$\vec{m}$，$\vec{n}$ はそれぞれ直線 ①，② の法線ベクトルである。
したがって

$\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2\times1+4\times(-3)}{\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

したがって、2 直線のなす角 α は $\alpha=180°-\theta=180°-135°=45°$

23 (1)　$|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ の両辺を 2 乗すると　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$2\vec{p}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=0$

両辺を 2 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ であるから

$\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{MP}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{0}$ のとき，点 P は M と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA の中点 M を通り OA に垂直な直線，すなわち線分 OA の垂直二等分線である。

別解　$|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

よって，点 P は 2 点 O，A から等距離にある。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA の垂直二等分線である。

(2)　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ の両辺に $|\vec{a}|^2$ を加えると

$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$

したがって，点 P が描く図形は，点 A を中心とする半径 OA の円である。