1

(1) $\lim_{x\to-1}(x^2+x)=(-1)^2+(-1)=0$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{0^2-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{t\to1}\sqrt{2t+7}=\sqrt{2\cdot1+7}=\sqrt{9}=3$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)}{x}=\lim_{x\to0}(x-3)=-3$

(5) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x-3}=-\frac{3}{2}$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-1)+1}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=-1$

2

(1) $\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-(x+2)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}=\frac{3}{4}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1$

3

(1) $x\to1$ のとき $1\to1$, $(x-1)^2\to+0$ よって $\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

(2) $x\to0$ のとき $\frac{1}{x^2}\to\infty$, $3\to3$ よって $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-3\right)=\infty$

(3) $x\to-1$ のとき $2\to2$, $\frac{1}{(x+1)^2}\to\infty$

よって $\lim_{x\to-1}\left\{2-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

4

(1) $\lim_{x\to2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty$

(2) $\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}$ (1), (2) から 極限はない。

(4) $x>0$ のとき $\frac{2x^2+3x}{|x|}=\frac{2x^2+3x}{x}=2x+3$ よって $\lim_{x\to+0}\frac{2x^2+3x}{|x|}=3$

(5) $x<0$ のとき $\frac{2x^2+3x}{|x|}=\frac{2x^2+3x}{-x}=-2x-3$ よって $\lim_{x\to-0}\frac{2x^2+3x}{|x|}=-3$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{2x^2+3x}{|x|}$ (4), (5) から 極限はない。

5

(1) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+3}+2x)(\sqrt{x^2+3}-2x)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{-3x^2+3}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$

6

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x-1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=3$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^2}+1}=-\infty$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(5) $\lim_{x\to\infty}(5^x-3^x)=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=\infty$

(6) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x+2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

7

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{3}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$

8

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{2}=2$

(2) $x=-t$ とおくと $x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2-4t}-t)$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$

(3) $x=-t$ とおくと $x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}\,t}{\sqrt{2t^2-t}+\sqrt{2t^2+t}}$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{t}}+\sqrt{2+\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{2}$

別解 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$

(4) $x=-t$ とおくと $x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t+1})$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}=-1$

別解 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$=-1$

注意 (3), (4) の 別解 では, $x<0$ のとき $\sqrt{x^2}=-x$ であることに注意する。

9

(1) $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\sin x=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

(2) $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\cos x=\cos\frac{3}{2}\pi=0$

(3) $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+0}\tan x=-\infty$, $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-0}\tan x=+\infty$ であるから, 極限はない。

(4) $\lim_{x\to\infty}\sin x$ について

m を整数として $x=m\pi$ とおくと

$\lim_{x\to\infty}\sin x=\lim_{m\to\infty}\sin m\pi=0$

n を整数として $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ とおくと

$\lim_{x\to\infty}\sin x=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$

よって, 極限はない。

(5) $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{2}{x}=\cos0=1$

(6) $\frac{1}{x}=\theta$ とおくと $x\to-0$ のとき $\theta\to-\infty$

よって, $\lim_{x\to-0}\tan\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to-\infty}\tan\theta$ であるから, 極限はない

10

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\lim_{x\to0}5\cdot\frac{\sin5x}{5x}=5\cdot1=5$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{\sin3x}=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(-2x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{-2\cdot\frac{\sin(-2x)}{-2x}\right\}=-2\cdot1=-2$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin4x}=\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4x}{\sin4x}\right)=2\cdot1\cdot\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\sin 2x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=2\cdot1\cdot1\cdot1=2$

別解 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\left(2\sin x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}2\cos^2x=2\cdot1^2=2$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(-x)}{\tan x}=\lim_{x\to0}\sin(-x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(-\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}(-\cos x)=-1$

11 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{\sin x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{0}{1+1}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}(1+\cos x)=2$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{3x^2(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{3x^2(\cos x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{\cos x+1}=1^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{6}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan 2x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right)=1-2\cdot1\cdot1=-1$

12 (1) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}2\cdot\frac{\sin t}{t}=2\cdot1=2$

(2) $x-\pi=t$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$

13 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1\cdot1=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{3x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{3x^2(1+\cos 3x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}3\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 3x}=3\cdot1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot1=3$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$

14 (1) $0\leqq|\sin 4x|\leqq1$ から　$0\leqq\left|\dfrac{\sin 4x}{x}\right|\leqq\dfrac{1}{|x|}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin 4x}{x}\right|=0$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 4x}{x}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to0}4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot1=4$

(3) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{4x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{t}{4}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}=\frac{1}{4}$

(4) $0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{4x}\right|\leqq1$ から　$0\leqq\left|x\sin\dfrac{1}{4x}\right|\leqq|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{4x}\right|=0$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{4x}=0$

15 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{x}=\lim_{x\to0}\pi\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\pi$

(2) $x^\circ=\dfrac{\pi}{180}x$ ラジアン であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}=\frac{\pi}{180}$$

(3) $\sin x=t$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき　$t\longrightarrow0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x(1+\cos x)}{\sin^2x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1+\cos x}{\cos x}=2$

(5) $x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow1$ のとき　$t\longrightarrow0$

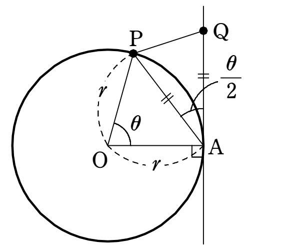
$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to0}\left(-\pi\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)=-\pi$$

(6) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow+0$

また　$\displaystyle\frac{x^2}{x-3}=\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}-3}=\frac{1}{t-3t^2}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t-3t^2}\sin t=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{1-3t}=1$

16 $\angle\mathrm{POA}=\theta$ とおく。



P を A に近づけるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい。

$\angle\mathrm{PAQ}$ は弧 AP に対する円周角 (中心角の半分) に等しいから　$\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle\mathrm{OAP}$ は $\mathrm{OA}=\mathrm{OP}$ の二等辺三角形であるから

$\mathrm{AP}=2\mathrm{OA}\sin\dfrac{\theta}{2}=2r\sin\dfrac{\theta}{2}$

また，$\triangle\mathrm{APQ}$ は $\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ の二等辺三角形であるから

$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AP}\sin\dfrac{\theta}{4}=4r\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{4}$

また　$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=r\theta$

P が円周上を A に限りなく近づくとき，$\theta\longrightarrow+0$ であるから，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}{}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4r\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}}{r^2\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{r}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}=\frac{1}{2r}$$

17 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$，$f(0)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

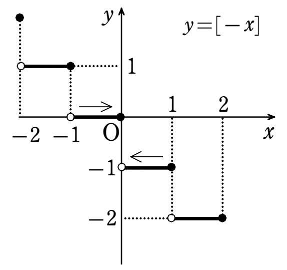
したがって，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2) $-1\leqq-x<0$　すなわち $0<x\leqq1$ のとき

$[-x]=-1$

$0\leqq-x<1$　すなわち $-1<x\leqq0$ のとき

$[-x]=0$



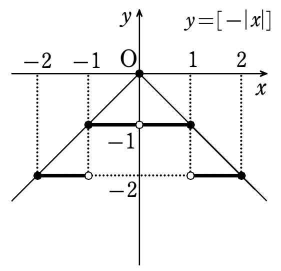
よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)$ は存在しない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で不連続である。

(3) $-1<x<0$，$0<x<1$ のとき，

$-1<-|x|<0$ であるから　$[-|x|]=-1$



よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)=-1$

また　$f(0)=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で不連続である。

18 (1) $f(x)=x-2\sin x-3$ とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続である。

また　$f(0)=-3<0$，$f(\pi)=\pi-3>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

(2) $f(x)=x-3^{-x}$ とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続である。

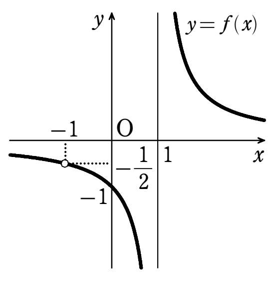
また　$f(0)=-1<0$，$f(1)=\dfrac{2}{3}>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

19 (1) この関数の定義域は，$x^2-1\neq0$ から　$x\neq\pm1$

よって　$\displaystyle f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

$\displaystyle=\frac{1}{x-1}$　$(x\neq\pm1)$



また，$a\neq\pm1$ とすると

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\frac{1}{a-1}$，$f(a)=\dfrac{1}{a-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

よって，定義域においてこの関数は連続である。

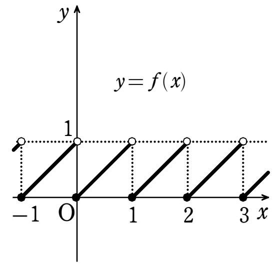
(2) 定義域は実数全体である。整数 n について

$n\leqq x<n+1$ のとき

$f(x)=x-[x]=x-n$

$n-1\leqq x<n$ のとき

$f(x)=x-[x]=x-(n-1)$



したがって

$\displaystyle\lim_{x\to n+0}f(x)=\lim_{x\to n+0}(x-n)=n-n=0$

$\displaystyle\lim_{x\to n-0}f(x)=\lim_{x\to n-0}\{x-(n-1)\}=n-(n-1)=1$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to n}f(x)$ は存在しない。

また，整数でない実数 a $(n<a<n+1)$ について

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(x-n)=a-n$，$f(a)=a-[a]=a-n$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

よって，関数 $f(x)$ は $x=n$ (n は整数) で不連続，他で連続である。

20 与えられた無限級数は，初項 x，公比 $\dfrac{1}{1+|x|}$ の無限等比級数である。

[1] 初項が 0 すなわち $x=0$ のとき

この無限等比級数は収束し，その和は 0 である。

すなわち　$f(0)=0$

[2] $x \neq 0$ のとき

$0<\dfrac{1}{1+|x|}<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和は

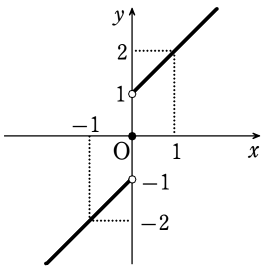
$$f(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+|x|}}=\frac{x(1+|x|)}{|x|}$$

[1]，[2] から

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$$

グラフは [図] のようになる。

また，$x=0$ で不連続，他で連続である。



21 (1) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ とおく。

[1] $x^2<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$x^{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=1+x$

[2] $x^2=1$ すなわち $x=\pm 1$ のとき

$x=1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=1$

$x=-1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$

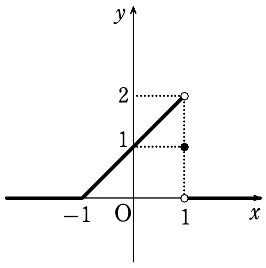
[3] $x^2>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$x^{2n} \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty)$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$

ゆえに，グラフは [図] のようになる。

また，$x=1$ で不連続，他で連続である。



(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{1+|x|^n}$ とおく。

[1] $|x|<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき　$|x|^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=x-1$

[2] $|x|=1$ すなわち $x=\pm 1$ のとき

$x=1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$

$x=-1$ のとき　$f(x)=\dfrac{-1-1}{1+1}=-1$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=-1$

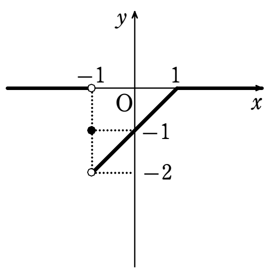
[3] $|x|>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$|x|^n \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty)$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$

ゆえに，グラフは [図] のようになる。

また，$x=-1$ で不連続，他で連続である。



(3) $f(x)=\dfrac{n\sin 2x+1}{n\sin x+1}$ とおく。

[1] $\sin x \neq 0$ すなわち $x \neq m\pi$ (m は整数) のとき

$$y=\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2x+\dfrac{1}{n}}{\sin x+\dfrac{1}{n}}=\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\cos x$$

[2] $\sin x=0$ すなわち $x=m\pi$ (m は整数) のとき

$f(x)=\dfrac{1}{1}=1$

よって　$y=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=1$

ゆえに，グラフは [図] のようになる。

また，$x=m\pi$ (m は整数) で不連続，他で連続である。