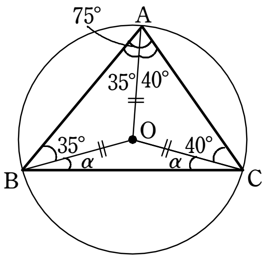
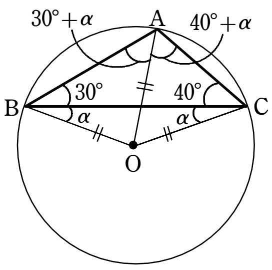
1 (1)　AD は $\angle A$ の二等分線であるから　BD : DC＝AB : AC
AB : AC＝12 : 16＝3 : 4 であるから　6 : x＝3 : 4
よって　$3x=24$　　ゆえに　$x=8$
(2)　AD は $\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角の二等分線であるから　BD : DC＝AB : AC
AB : AC＝21 : 15＝7 : 5 であるから　$(x+8):x=7:5$
よって　$7x=5(x+8)$　　ゆえに　$x=20$

2 (1)　O と A を結ぶ。
点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから
$OA=OB=OC$
よって　$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$
$\angle OCA=\angle OAC=40^\circ$
$\angle OAB=\angle OBA=75^\circ-40^\circ=35^\circ$
$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ であるから
$75^\circ+(35^\circ+\alpha)+(40^\circ+\alpha)=180^\circ$
したがって　$\alpha=15^\circ$

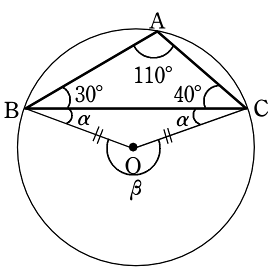


別解　円周角の定理により　$\angle BOC=2\angle A=2\times75^\circ=150^\circ$
$OB=OC$ であるから　$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$
よって，$\triangle OBC$ において　$150^\circ+\alpha+\alpha=180^\circ$
したがって　$\alpha=15^\circ$

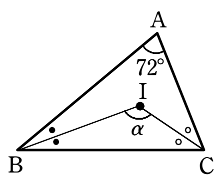
(2)　O と A を結ぶ。
点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから
$OA=OB=OC$
よって　$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$
$\angle OCA=\angle OAC=40^\circ+\alpha$
$\angle OAB=\angle OBA=30^\circ+\alpha$
$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ であるから
$\{(30^\circ+\alpha)+(40^\circ+\alpha)\}+30^\circ+40^\circ=180^\circ$
したがって　$\alpha=20^\circ$



別解　$\triangle ABC$ において
$\angle A=180^\circ-(30^\circ+40^\circ)=110^\circ$
右の図のように角 β をとると，円周角の定理により
$\beta=2\angle A=2\times110^\circ=220^\circ$
ゆえに　$\angle BOC=360^\circ-\beta=360^\circ-220^\circ=140^\circ$
$OB=OC$ であるから　$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$
よって，$\triangle OBC$ において　$140^\circ+\alpha+\alpha=180^\circ$
したがって　$\alpha=20^\circ$

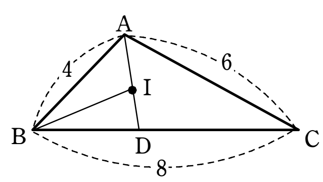


3 (1)　$\angle IAC=\angle IAB=36^\circ$，$\angle IBA=\angle IBC=32^\circ$，$\angle ICA=\angle ICB=\alpha$
$\triangle ABC$ において，内角の和は 180° であるから
$$\alpha=\frac{1}{2}\{180^\circ-(36^\circ\times2+32^\circ\times2)\}=22^\circ$$
(2)　$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-72^\circ=108^\circ$
$\angle IBA=\angle IBC$，$\angle ICA=\angle ICB$ であるから
$$\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$$
$$=\frac{1}{2}\times108^\circ=54^\circ$$



$\triangle IBC$ において，内角の和は 180° であるから
$\alpha=180^\circ-(\angle IBC+\angle ICB)=180^\circ-54^\circ=126^\circ$

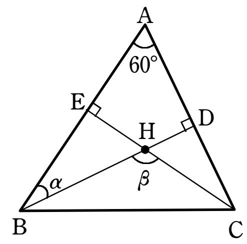
4　I は $\triangle ABC$ の内心であるから，3 つの内角の二等分線の交点である。



(1)　$\triangle ABC$ において，AD は $\angle A$ の二等分線であるから　AB : AC＝BD : DC
すなわち　4 : 6＝BD : (8－BD)
よって　4(8－BD)＝6BD
これを解いて　$BD=\dfrac{16}{5}$
(2)　$\triangle ABD$ において，BI は $\angle B$ の二等分線であるから
AB : BD＝AI : ID
よって　$AI:ID=4:\dfrac{16}{5}=5:4$

5 (1)　点 G は線分 AD を 2 : 1 に内分するから　AG : AD＝2 : 3
よって　$AG=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{2}{3}\times9=6$
(2)　AG，GD を底辺とみると，$\triangle ABG$ と $\triangle GBD$ の高さは等しいから，面積比は底辺の長さの比に等しい。
よって　$\triangle ABG:\triangle GBD=AG:GD=2:1$

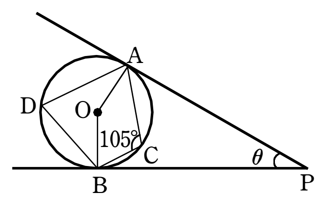
6　線分 BH の延長と辺 AC の交点を D，線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。
H は $\triangle ABC$ の垂心であるから
$\angle ADB=90^\circ$，$\angle AEC=90^\circ$
$\triangle ABD$ の内角の和は 180° であるから
$\alpha+60^\circ+90^\circ=180^\circ$
よって　$\alpha=30^\circ$
また，$\angle BHC=\angle BEH+\angle EBH$ であるから
$\beta=90^\circ+30^\circ=120^\circ$



7 (1)　$\triangle ABC$ にチェバの定理を用いると
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1\quad すなわち\quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{2}=1$$
$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{8}$ より　BP : PC＝3 : 8
(2)　$\triangle ABC$ にチェバの定理を用いると
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1\quad すなわち\quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{2}=1$$
$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{10}{7}$ より　BP : PC＝10 : 7

8 (1)　$\triangle ABC$ と直線 PR にメネラウスの定理を用いると
$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1\quad すなわち\quad \frac{y}{x}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{3}=1$$
$\dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{4}$ より　$x:y=9:4$
(2)　$\triangle PBC$ と直線 AR にメネラウスの定理を用いると
$$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QP}\cdot\frac{PA}{AB}=1\quad すなわち\quad \frac{x}{y}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{6}=1$$
$\dfrac{x}{y}=2$ より　$x:y=2:1$

9 (1)　円周角の定理により
$\angle AOB=2\angle ACB=2\times30^\circ=60^\circ$
また　$\angle ADB=\angle DBC+\angle DCB$
$=50^\circ+30^\circ=80^\circ$
$\angle ADB=\angle OAD+\angle AOB$
$=\theta+60^\circ$
よって　$\theta+60^\circ=80^\circ$　　ゆえに　$\theta=20^\circ$
(2)　$\triangle ABC$ の内角の和は 180° であるから
$\angle BAC=180^\circ-90^\circ-25^\circ=65^\circ$
よって，A と D は直線 BC に関して同じ側にあり，$\angle BAC=\angle BDC$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。
よって，円周角の定理により
$\angle ADB=\angle ACB=25^\circ$
また　$\angle BEA=\angle EDA+\angle EAD$
よって　$55^\circ=25^\circ+\theta$　　ゆえに　$\theta=30^\circ$
(3)　$\angle CDP=\angle DAQ+\angle DQA=52^\circ+40^\circ=92^\circ$
四角形 ABCD は円に内接しているから
$\angle PCD=\angle DAQ=52^\circ$
$\triangle PCD$ の内角の和は 180° であるから
$\theta+52^\circ+92^\circ=180^\circ$　　よって　$\theta=36^\circ$
(4)　$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$
右の図のように，C を含まない弧 AB 上に点 D をとると，四角形 ADBC は円に内接するから
$\angle ADB=180^\circ-105^\circ=75^\circ$
よって，円周角の定理により
$\angle AOB=2\times\angle ADB=2\times75^\circ=150^\circ$
したがって，四角形 AOBP において
$\theta=360^\circ-(150^\circ+90^\circ+90^\circ)=30^\circ$



(5)　AT は円 O の接線であるから　$\angle ADB=\angle BAT=40^\circ$
等しい弧 BC，AB に対する円周角は等しいから
$\angle BDC=\angle ADB=40^\circ$
よって　$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=40^\circ+40^\circ=80^\circ$
四角形 ABCD は円に内接しているから
$\theta+80^\circ=180^\circ$　　よって　$\theta=100^\circ$

10　3 辺の長さが x，6，9 である三角形が存在するための条件は
$|6-9|<x<6+9$　　すなわち　$3<x<15$

$\boxed{11}$ (1)　円の接線の性質により　　BR$=$BP$=x$，CQ$=$CP$=6-x$

また　　AQ$=$AR$=5-x$

AC$=$AQ$+$CQ であるから　　$4=(5-x)+(6-x)$

これを解いて　　$x=\dfrac{7}{2}$

(2)　OP$=6-2=4$，PA$=6+4=10$

方べきの定理により　　PA・PB$=$PC・PD

よって　　$10\cdot 2=x\cdot 5$　　　　ゆえに　　$x=4$

(3)　方べきの定理により　　PA・PB $=$ PC・PD

よって　　$7\cdot(7+9)=8\cdot(8+x)$　　　　ゆえに　　$x=6$

(4)　PO の延長と円 O の交点を B とする。

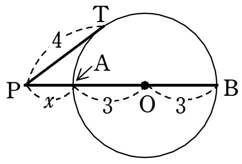
方べきの定理により　　PA・PB$=$PT^2

よって　　$x\cdot(x+6)=4^2$

ゆえに　　$x^2+6x-16=0$

$(x-2)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　　$x=2$



$\boxed{12}$ 点 O′ から OA に垂線 O′H を下ろす。

四角形 AHO′B は長方形であるから

AB$=$HO′，HA$=$O′B$=2$

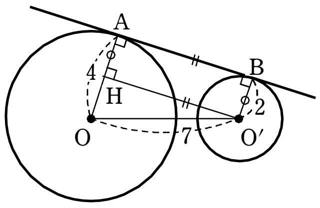
よって　　OH$=$OA$-$HA$=4-2=2$

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

HO′$=\sqrt{\text{OO}'^2-\text{OH}^2}$

$=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}$

したがって　　AB$=3\sqrt{5}$



$\boxed{13}$

	面の数	頂点の数	辺の数
正四面体	4	4	6
正六面体	6	8	12
正八面体	8	6	12
正十二面体	12	20	30
正二十面体	20	12	30