1 $y=f(x)$ とする。

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3^2-2\cdot3+2)-(1^2-2\cdot1+2)}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

2 $$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(3+h)^3-3(3+h)\}-(3^3-3\cdot3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{24h+9h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(24+9h+h^2)=24$$

3 $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ より、

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-4(x+h)+1\}-(x^2-4x+1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2x-4)h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(2x-4+h)=2x-4$$

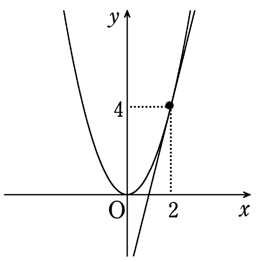
4 $f(x)=x^2$ とする。

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{4h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(4+h)=4$$



よって，接線の傾きは 4

5 (1) $y'=(2x^3)'+(3x^2)'-(4x)'+(5)'=6x^2+6x-4$

(2) $y=(x-2)(x+2)^2=\{(x-2)(x+2)\}(x+2)=(x^2-4)(x+2)=x^3+2x^2-4x-8$

よって　$y'=(x^3)'+(2x^2)'-(4x)'-(8)'=3x^2+4x-4$

6 $f(x)=x^2-x$ とおくと　$f'(x)=2x-1$

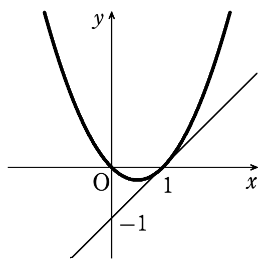
よって，点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きは

$f'(1)=2\cdot1-1=1$

したがって，接線の方程式は

$y-0=1\cdot(x-1)$

よって　$y=x-1$



7 $y=x^3-3x^2$

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

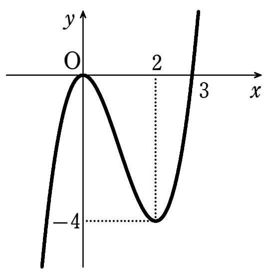
よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

したがって，

$x=0$ で極大値 0，$x=2$ で極小値 -4 をとる。

グラフは右の図のようになる。



8 $y'=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

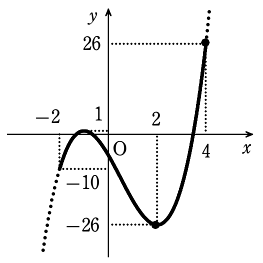
$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-10	↗	極大 1	↘	極小 -26	↗	26

したがって，y は $x=4$ で最大値 26，

$x=2$ で最小値 -26 をとる。



9 $f(x)=x^3-3x^2+3$ とおくと

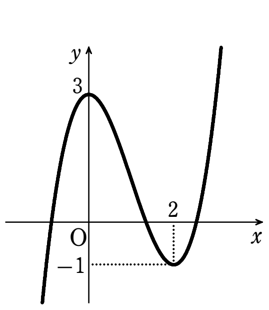
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

したがって，異なる実数解の個数は 3 個



10 $f(x)$ が極値をもつのは，$f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+2a=0$ …… ① が異なる 2 つの実数解をもつときである。

よって，① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=a^2-3\cdot2a>0$

すなわち　$a(a-6)>0$　　したがって　$a<0,\ 6<a$

11 $f(x)=(x^3+6x^2+8)-15x$ とすると

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x^2+4x-5)=3(x+5)(x-1)$

$x\geqq0$ において，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	8	↘	0	↗

よって，$x\geqq0$ において，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる。

したがって，$x\geqq0$ のとき，$f(x)\geqq0$ であるから

$(x^3+6x^2+8)-15x\geqq0$

すなわち　$x^3+6x^2+8\geqq15x$

12 C は積分定数とする。

(1) (与式)$=2\displaystyle\int x\,dx-7\int dx=2\cdot\frac{1}{2}x^2-7x+C=x^2-7x+C$

(2) (与式)$=\displaystyle\int x^2dx+3\int x\,dx=\frac{1}{3}x^3+3\cdot\frac{1}{2}x^2+C=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C$

13 (1) (与式)$=\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}=(9-9-9)-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=-\frac{32}{3}$

(2) 上端と下端が等しいから　(与式)$=0$

(3) (与式)$=\displaystyle\int_0^1\{(x^2-5x)-(-2x^2+3x)\}dx=\int_0^1(3x^2-8x)dx=\left[x^3-4x^2\right]_0^1=1-4=-3$

(4) (与式)$=\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+3)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+3x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{2}{3}+3\right)-(-18-9)=\frac{92}{3}$

(5) (与式)$=\displaystyle\left[\frac{t^3}{3}-t^2+2t\right]_0^2=\frac{8}{3}-4+4=\frac{8}{3}$

14 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=a$ とおくと　$f(x)=x+\dfrac{1}{2}a$

ゆえに　$\displaystyle a=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(t+\frac{1}{2}a\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}at\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a$

よって　$a=1$　　したがって　$f(x)=x+\dfrac{1}{2}$

15 $f'(x)=3x^2-2x+3$

16 (1) 等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=8x-3$

また，与えられた等式で $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=4-3+a$　　これを解くと　$a=-1$

(2) 等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=2x-2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

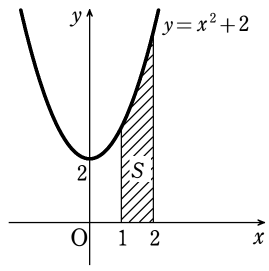
$0=a^2-2a-3$　　これを解くと　$a=-1,\ 3$

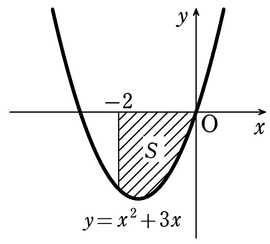
17 (1) $1\leqq x\leqq2$ で $y\geqq0$ であるから

$$S=\int_1^2(x^2+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{13}{3}$$

(2) $-2\leqq x\leqq0$ で $y\leqq0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{0}(x^2+3x)dx=\int_0^{-2}(x^2+3x)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{-2}=-\frac{8}{3}+6=\frac{10}{3}$$





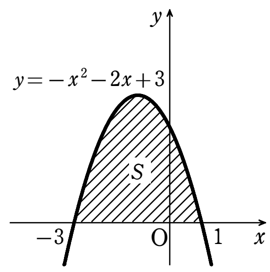
(3) この放物線と x 軸の交点の x 座標は，

$-x^2-2x+3=0$ を解いて　$x=-3,\ 1$

$-3\leqq x\leqq1$ で $y\geqq0$ であるから

$$S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-(9-9-9)=\frac{32}{3}$$



別解 [積分の計算]

$$S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx$$

$$=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx=\frac{\{1-(-3)\}^3}{6}=\frac{32}{3}$$

(4) この関数のグラフと x 軸の交点の x 座標は，

$x^2-6x+8=0$ を解いて　$x=2,\ 4$

$1\leqq x\leqq3$ であるから　$x=2$

$1\leqq x\leqq2$ で　$y\geqq0$

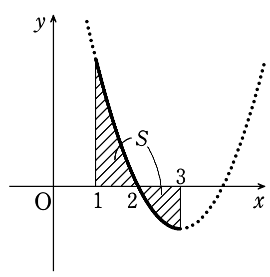
$2\leqq x\leqq3$ で　$y\leqq0$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^2(x^2-6x+8)dx+\int_2^3\{-(x^2-6x+8)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^3$$

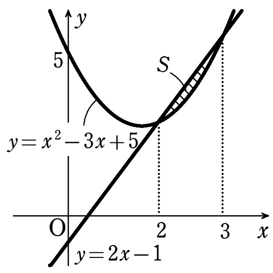
$$=\left\{\left(\frac{8}{3}-12+16\right)-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)\right\}+\left\{(-9+27-24)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)\right\}=2$$



(5) 方程式 $x^2-3x+5=2x-1$ を解くと，

$x^2-5x+6=0$ より　　$x=2,\ 3$

よって，求める面積 S は，図から



$$S=\int_2^3\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx$$
$$=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3$$
$$=\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-\frac{8}{3}+10-12\right)=\frac{1}{6}$$

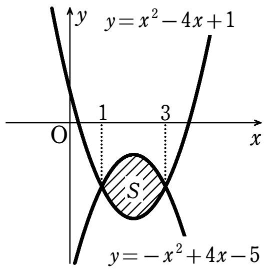
別解 [積分の計算]

$$S=\int_2^3\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx=-\int_2^3(x-2)(x-3)dx$$
$$=\frac{(3-2)^3}{6}=\frac{1}{6}$$

(6) 方程式 $x^2-4x+1=-x^2+4x-5$ を解くと，

$x^2-4x+3=0$ より　　$x=1,\ 3$

よって，求める面積 S は，図から



$$S=\int_1^3\{(-x^2+4x-5)-(x^2-4x+1)\}dx$$
$$=\int_1^3(-2x^2+8x-6)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3$$
$$=(-18+36-18)-\left(-\frac{2}{3}+4-6\right)=\frac{8}{3}$$

別解 [積分の計算]

$$S=\int_1^3\{(-x^2+4x-5)-(x^2-4x+1)\}dx=\int_1^3(-2x^2+8x-6)dx$$
$$=-2\int_1^3(x-1)(x-3)dx=\frac{2(3-1)^3}{6}=\frac{8}{3}$$

18 接点を P とし，その x 座標を t とする。

$y=x^2-x+4$ より，$y'=2x-1$ であるから，点 P における接線の方程式は

$$y-(t^2-t+4)=(2t-1)(x-t)$$

すなわち　　$y=(2t-1)x-t^2+4$

これが点 $(1,\ 0)$ を通るから　　$0=(2t-1)\cdot1-t^2+4$

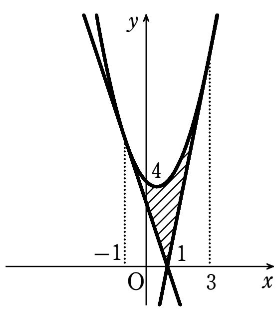
整理すると　　$t^2-2t-3=0$

これを解くと　　$t=-1,\ 3$

よって，接線の方程式は　　$t=-1$ のとき　$y=-3x+3$

$t=3$　のとき　$y=5x-5$

求める面積を S とすると，図から



$$S=\int_{-1}^1\{(x^2-x+4)-(-3x+3)\}dx$$
$$+\int_1^3\{(x^2-x+4)-(5x-5)\}dx$$
$$=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^1+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1+1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)$$
$$=\frac{16}{3}$$

参考 [積分の計算]

$$S=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx=\int_{-1}^1(x+1)^2dx+\int_1^3(x-3)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^1+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_1^3=\frac{8}{3}-0+\left\{0-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}=\frac{16}{3}$$

19 $f(x)=x^3-x^2-12x$ とすると　　$f'(x)=3x^2-2x-12$

接線の傾きは　　$f'(-1)=3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-12=-7$

よって，接線の方程式は　　$y-10=-7(x+1)$　すなわち　$y=-7x+3$

曲線 $y=f(x)$ と接線の共有点の x 座標は，方程式

$$x^3-x^2-12x=-7x+3 \quad \text{すなわち} \quad x^3-x^2-5x-3=0$$

の解である。

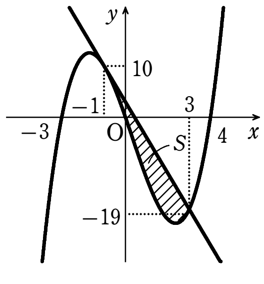
左辺を因数分解すると　　$(x+1)^2(x-3)=0$

これを解くと　　$x=-1,\ 3$

接線が曲線 $y=f(x)$ と交わる点の x 座標は 3 であり，

グラフは右の図のようになる。

よって，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^3\{(-7x+3)-(x^3-x^2-12x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^3(-x^3+x^2+5x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-1}^3$$
$$=\left(-\frac{81}{4}+9+\frac{45}{2}+9\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-3\right)=\frac{64}{3}$$

別解 [積分の計算]

$$S=-\int_{-1}^3(x^3-x^2-5x-3)dx=-\int_{-1}^3(x+1)^2(x-3)dx$$
$$=-\int_{-1}^3(x+1)^2\{(x+1)-4\}dx=-\int_{-1}^3\{(x+1)^3-4(x+1)^2\}dx$$
$$=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-\frac{4}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^3=-\left(64-\frac{256}{3}\right)=\frac{64}{3}$$