1 (1) この和は，第 k 項が $(2k)^2$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

(2) この和は，第 k 項が $k(k+1)(2k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+2)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$$

2 数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{i=1}^{k}2i=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=k(k+1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) $a_k=1+3+9+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

3 (1) 階差数列は 1，2，3，4，…… となるから，この数列の第 k 項は　k

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=2+\frac{1}{2}(n-1)n\qquad\text{すなわち}\qquad a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+4)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は　$\frac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2) 階差数列は 1，4，9，16，…… となるから，この数列の第 k 項は　k^2

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

すなわち　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　……①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は

$\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　$\left[\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\text{ でもよい}\right]$

(3) 階差数列は -2，-4，-6，-8，…… となるから，この数列の第 k 項は　$-2k$

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

すなわち　$a_n=-n^2+n+10$　……①

初項は $a_1=10$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は　$-n^2+n+10$

(4) 階差数列は 1，3，9，27，…… となるから，この数列の第 k 項は　3^{k-1}

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}\qquad\text{すなわち}\qquad a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

4 (1) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=-2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$$

よって　$a_n=2n-4$　……①

① で $n=1$ とすると $a_1=-2$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n-4$

(2) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=3$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}$$

よって　$a_n=3n^2-3n+1$　……①

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ となり，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって，一般項は　$a_1=3$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$

(3) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=4$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-4)-(2^{n+1}-4)$$

よって　$a_n=2^{n+1}$　……①

① で $n=1$ とすると $a_1=4$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2^{n+1}$