第１問

解答解説のページへ

2 次関数 $y=-x^2+2x+2$ ……①のグラフの頂点の座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$である。また，$y=f(x)$ は x の 2 次関数で，そのグラフは，①のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであるとする。

(1)　下の $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ には，次の⓪～④のうちから当てはまるものを 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　① $<$　② $\geqq$　③ $\leqq$　④ $\neq$

$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値が $f(2)$ になるような p の値の範囲は

p $\boxed{\text{ウ}}$ $\boxed{\text{エ}}$ であり，最小値が $f(2)$ になるような p の値の範囲は

p $\boxed{\text{オ}}$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　2 次不等式 $f(x)>0$ の解が $-2<x<3$ になるのは

$$p=\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\quad q=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

のときである。

第２問

解答解説のページへ

[1]　条件 p_1，p_2，q_1，q_2 の否定をそれぞれ $\overline{p_1}$，$\overline{p_2}$，$\overline{q_1}$，$\overline{q_2}$ と書く。

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから１つ選べ。

命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は $\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪　$(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$

①　$(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$

②　$(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2})$

③　$(\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2})$

(2)　自然数 n に対する条件 p_1，p_2，q_1，q_2 を次のように定める。

p_1：n は素数である　　　　p_2：$n+2$ は素数である

q_1：$n+1$ は 5 の倍数である　　　　q_2：$n+1$ は 6 の倍数である

30 以下の自然数 n のなかで $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウエ}}$ は

命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$」

の反例となる。

[2]　△ABC において，AB $=3$，BC $=5$，∠ABC $=120°$ とする。

このとき，AC $=\boxed{\text{オ}}$，sin∠ABC $=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，

sin∠BCA $=\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

直線 BC 上に点 D を，AD $=3\sqrt{3}$ かつ∠ADC が鋭角，となるようにとる。点 P を線分 BD 上の点とし，△APC の外接円の半径を R とすると，R のとり得る値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}} \leqq R \leqq \boxed{\text{セ}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

[1]　ある高校 3 年生 1 クラスの生徒 40 人について，ハンドボール投げの飛距離のデータを取った。次の図 1 は，このクラスで最初に取ったデータのヒストグラムである。

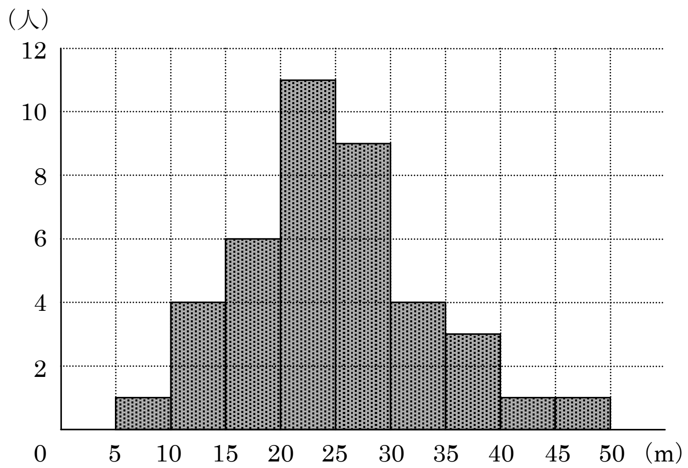


図1　ハンドボール投げ

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑧のうちから 1 つ選べ。

この 40 人のデータの第 3 四分位数が含まれる階級は，$\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪　5m 以上 10m 未満　　①　10m 以上 15m 未満

②　15m 以上 20m 未満　　③　20m 以上 25m 未満

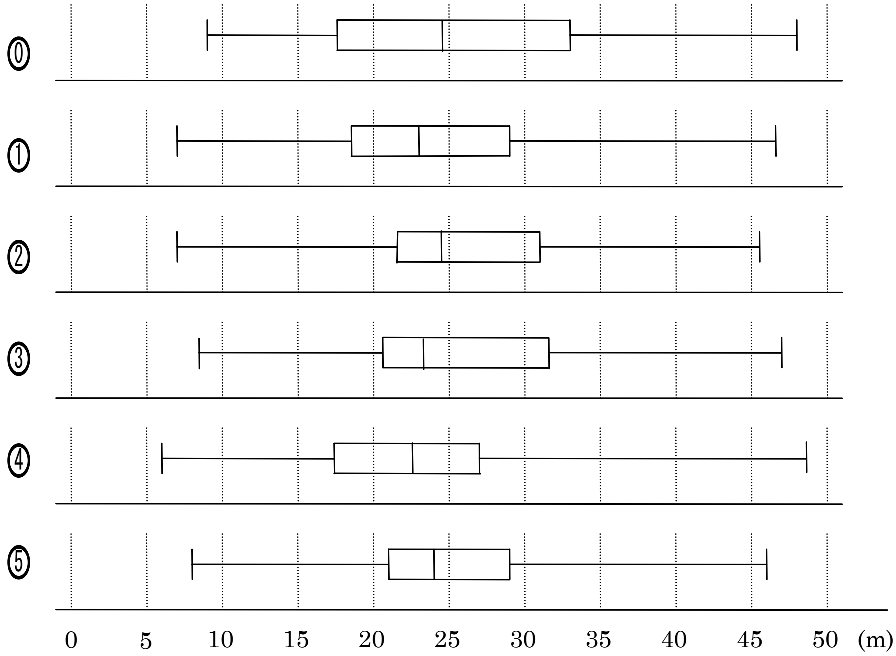
④　25m 以上 30m 未満　　⑤　30m 以上 35m 未満

⑥　35m 以上 40m 未満　　⑦　40m 以上 45m 未満

⑧　45m 以上 50m 未満

(2) 次の イ ～ オ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし， イ ～ オ の解答の順序は問わない。

このデータを箱ひげ図にまとめたとき，図 1 のヒストグラムと**矛盾するもの**は， イ ， ウ ， エ ， オ である。



(3) 次の文章中の $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ に入れるものとして最も適当なものを，下の⓪〜③のうちから1つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ の解答の順序は問わない。

後日，このクラスでハンドボール投げの記録を取り直した。次に示したA〜Dは，最初に取った記録から今回の記録への変化の分析結果を記述したものである。a〜dの各々が今回取り直したデータの箱ひげ図となる場合に，⓪〜③の組合せのうち分析結果と箱ひげ図が**矛盾するもの**は，$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ である。

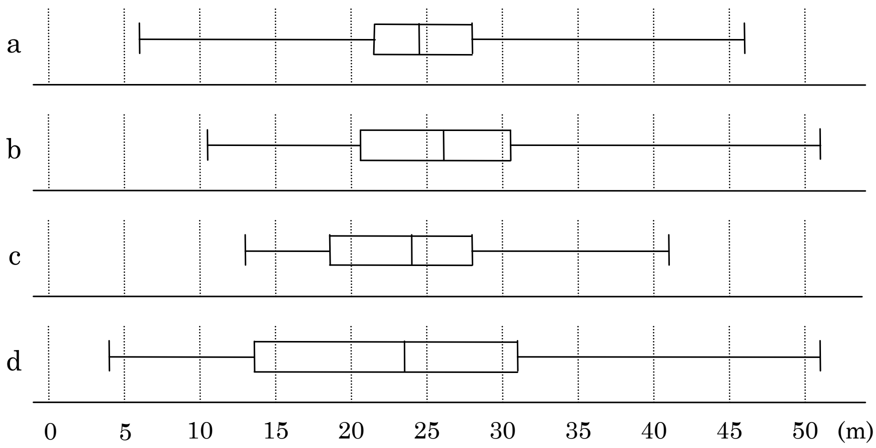
⓪ A－a　　① B－b　　② C－c　　③ D－d

A: どの生徒の記録も下がった。

B: どの生徒の記録も伸びた。

C: 最初に取ったデータで上位$\frac{1}{3}$に入るすべての生徒の記録が伸びた。

D: 最初に取ったデータで上位$\frac{1}{3}$に入るすべての生徒の記録は伸び，下位$\frac{1}{3}$に入るすべての生徒の記録は下がった。



[2] ある高校 2 年生 40 人のクラスで一人 2 回ずつハンドボール投げの飛距離のデータを取ることにした。次の図 2 は，1 回目のデータを横軸に，2 回目のデータを縦軸にとった散布図である。なお，一人の生徒が欠席したため，39 人のデータとなっている。

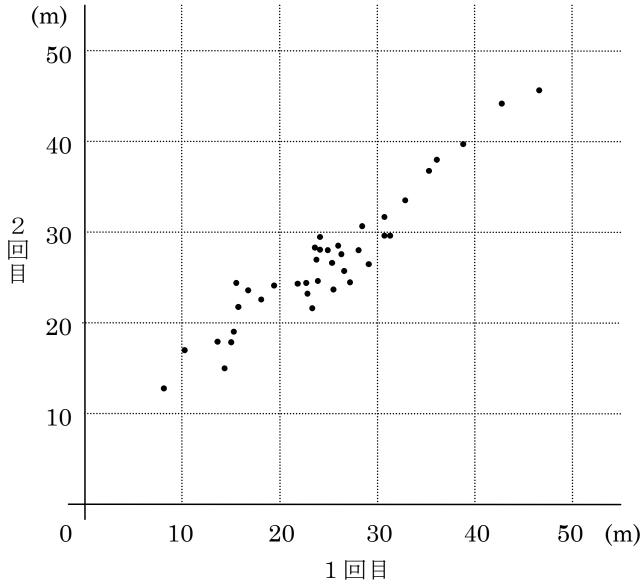


図 2

	平均値	中央値	分　散	標準偏差
1 回目のデータ	24.70	24.30	67.40	8.21
2 回目のデータ	26.90	26.40	48.72	6.98

1 回目のデータと 2 回目のデータの共分散	54.30

(共分散とは 1 回目のデータの偏差と 2 回目のデータの偏差の積の平均である)

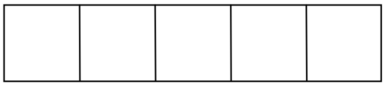
次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の ⓪〜⑨ のうちから 1 つ選べ。

1 回目のデータと 2 回目のデータの相関係数に最も近い値は，$\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ 0.67　① 0.71　② 0.75　③ 0.79　④ 0.83
⑤ 0.87　⑥ 0.91　⑦ 0.95　⑧ 0.99　⑨ 1.03

第４問

解答解説のページへ



同じ大きさの 5 枚の正方形の板を一列に並べて，図のような掲示板を作り，壁に固定する。赤色，緑色，青色のペンキを用いて，隣り合う正方形どうしが異なる色となるように，この掲示板を塗り分ける。ただし，塗り分ける際には，3 色のペンキをすべて使わなければならないわけではなく，2 色のペンキだけで塗り分けることがあってもよいものとする。

(1) このような塗り方は，全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある。

(2) 塗り方が左右対称となるのは，$\boxed{\text{ウエ}}$ 通りある。

(3) 青色と緑色の 2 色で塗り分けるのは，$\boxed{\text{オ}}$ 通りある。

(4) 赤色で塗られる正方形が 3 枚であるのは，$\boxed{\text{カ}}$ 通りある。

(5) 赤色に塗られる正方形が 1 枚である場合について考える。

・どちらかの端の 1 枚が赤色に塗られるのは，$\boxed{\text{キ}}$ 通りある。

・端以外の 1 枚が赤色に塗られるのは，$\boxed{\text{クケ}}$ 通りある。

よって，赤色に塗られる正方形が 1 枚であるのは，$\boxed{\text{コサ}}$ 通りある。

(6) 赤色に塗られる正方形が 2 枚であるのは，$\boxed{\text{シス}}$ 通りある。

第５問

解答解説のページへ

以下では，$a=756$ とし，m は自然数とする。

(1) a を素因数分解すると，$a=2^{\boxed{ア}}\cdot 3^{\boxed{イ}}\cdot\boxed{\quad ウ\quad}$である。

a の正の約数の個数は$\boxed{エオ}$個である。

(2) $\sqrt{am}$ が自然数となる最小の自然数 m は$\boxed{カキ}$である。$\sqrt{am}$ が自然数となるとき，m はある自然数 k により，$m=\boxed{カキ}k^2$ と表される数であり，そのときの $\sqrt{am}$ の値は$\boxed{クケコ}k$ である。

(3) 次に，自然数 k により$\boxed{クケコ}k$ と表される数で，11 で割った余りが 1 となる最小の k を求める。1 次不定方程式 $\boxed{クケコ}k-11l=1$ を解くと，$k>0$ となる整数解 $(k,\ l)$ のうち k が最小のものは，$k=\boxed{\quad サ\quad}$，$l=\boxed{シスセ}$である。

(4) $\sqrt{am}$ が 11 で割ると 1 余る自然数となるとき，そのような自然数 m のなかで最小のものは$\boxed{ソタチツ}$である。

第６問

解答解説のページへ

△ABC において，$AB = AC = 5$，$BC = \sqrt{5}$ とする。辺 AC 上に点 D を $AD = 3$ となるようにとり，辺 BC の B の側の延長と△ABD の外接円との交点で B と異なるものを E とする。

$CE \cdot CB = \boxed{アイ}$ であるから，$BE = \sqrt{\boxed{ウ}}$ である。

△ACE の重心を G とすると，$AG = \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ である。

AB と DE の交点を P とすると，$\dfrac{DP}{EP} = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ ……①である。

△ABC と△EDC において，点 A, B, D, E は同一円周上にあるので $\angle CAB = \angle CED$ で，$\angle C$ は共通であるから，$DE = \boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}$ ……②である。

①，②から，$EP = \dfrac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である。

第１問

問題のページへ

2 次関数 $y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$ ……①に対して，そのグラフの頂点の座標は$(1,\ 3)$ である。

さて，①のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものを$y=f(x)$ とおくと，このグラフの軸は$x=1+p$ となり，$f(x)$を x の式で表すと，

$$f(x)=-(x-1-p)^2+3+q$$
$$=-x^2+(2p+2)x-p^2-2p+2+q \cdots\cdots\cdots ②$$

(1)　$2\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)$の最大値が$f(2)$ になる条件は，$1+p\leqq 2$ すなわち $p\leqq 1$ であり，最小値が$f(2)$ になる条件は，$1+p\geqq\dfrac{2+4}{2}$ すなわち $p\geqq 2$ である。

(2)　2 次不等式$f(x)>0$ の解が$-2<x<3$ になるのは,

$$f(x)=-(x+2)(x-3)=-x^2+x+6 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$2p+2=1$，$-p^2-2p+2+q=6$ となるので,

$$p=-\frac{1}{2},\ q=\frac{13}{4}$$

［解 説］

2 次関数の基本題です。量的にも，旧課程の半分程度です。

第２問

問題のページへ

[1] (1) 命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は,

「$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)}$ $\Longrightarrow$ $\overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)}$」$\Longleftrightarrow$「$(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$」

(2) $(p_1$ かつ $p_2)$ ： n と $n+2$ がともに素数, すなわち $(n,\ n+2)$ は双子素数である

$(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$ ： $n+1$ は 5 の倍数ではないが, 6 の倍数である

さて, 30 以下の自然数 n のなかで, 命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$」の反例は, $(n,\ n+2)$ は双子素数であるが, $n+1$ は 5 の倍数であるか, または 6 の倍数ではないものとなる。そこで, まず n が 30 以下の双子素数は,

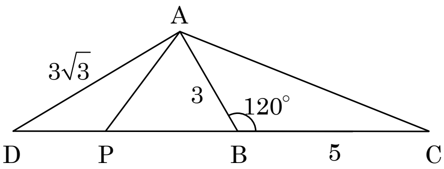
$$(n,\ n+2)=(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ (17,\ 19),\ (29,\ 31)$$

すると, $n+1$ が 5 の倍数であるか, または 6 の倍数ではないものは, 右表より, $n=3$, 29 である。

n	3	5	11	17	29
$n+1$	4	6	12	18	30

[2] △ABC に余弦定理を適用して,

$$\mathrm{AC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ=49$$
$$\mathrm{AC}=7$$



また, $\sin\angle\mathrm{ABC}=\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から, 正弦定理を適用して,

$$\frac{3}{\sin\angle\mathrm{BCA}}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{1}{7}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

さて, AP のとり得る値は, △ADB において, ∠D が鋭角で ∠ABD = 60° から,

$$3\sin60^\circ\leqq\mathrm{AP}\leqq3\sqrt{3},\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\mathrm{AP}\leqq3\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

△APC の外接円の半径 R は, 正弦定理より, $2R=\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}$

$$R=\frac{14}{2\cdot3\sqrt{3}}\mathrm{AP}=\frac{7}{3\sqrt{3}}\mathrm{AP}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqq R\leqq\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot3\sqrt{3}$ となり, $\dfrac{7}{2}\leqq R\leqq7$

[解 説]

[1]は命題についての基本事項の確認です。設問(1)と(2)は, 内容的には独立しています。[2]は三角比の三角形への応用です。平面幾何との融合が不可能になったので, 内容的には易しめです。

第３問

問題のページへ

[1] (1) ヒストグラムで与えられた飛距離のデータを度数分布表で整理すると，右表のようになる。すると，40 人のデータの第 3 四分位数は，飛距離が小さい方から 30 番目と 31 番目の平均となり，含まれる階級は「25m 以上 30m 未満」である。

飛距離の階級 (m)	度数 (人)	累積 (人)
5 以上～10 未満	1	1
10 以上～15 未満	4	5
15 以上～20 未満	6	11
20 以上～25 未満	11	22
25 以上～30 未満	9	31
30 以上～35 未満	4	35
35 以上～40 未満	3	38
40 以上～45 未満	1	39
45 以上～50 未満	1	40
合　計	40	

(2) まず，箱ひげ図⓪～⑤について，最小値，中央値，最大値はすべて同じ階級にあり，与えられたデータと矛盾しない。

次に，第 3 四分位数について，(1)の結果より，矛盾するものは，⓪と②と③である。

さらに，第 1 四分位数は，飛距離が小さい方から 10 番目と 11 番目の平均となり，含まれる階級は「15m 以上 20m 未満」であり，矛盾するものは，②と③と⑤である。

以上より，与えられたデータと矛盾する箱ひげ図は，⓪と②と③と⑤である。

(3) まず，箱ひげ図 a については，第 1 四分位数の含まれる階級が「15m 以上 20m 未満」から「20m 以上 25m 未満」に変化しているので，「どの生徒の記録も下がった」とはいえない。

また，箱ひげ図 c については，最大値の含まれる階級が「45m 以上 50m 未満」から「40m 以上 45m 未満」に変化しているので，「最初に取ったデータで上位$\dfrac{1}{3}$に入るすべての生徒の記録が伸びた」とはいえない。

なお，箱ひげ図 b と分析結果 B，箱ひげ図 d と分析結果 D については，どちらも矛盾しているとはいえない。

[2] 1 回目のデータと 2 回目のデータの相関係数を r とすると，

$$r=\frac{54.30}{8.21\times6.98}\fallingdotseq 0.95$$

［解 説］

今回，初めて出題される分野です。問題文が非常に長く，読解に時間がかかります。しかも，[1]の設問は定性的な内容になっており，従来とは違った雰囲気に構成されています。また，[2]は定義にあてはめるだけですが，数値計算がやや面倒です。

第４問

問題のページへ

(1) 掲示板を構成している正方形を，右図のように，左端から A, B, C, D, E とおく。

A	B	C	D	E

すると，この掲示板を 3 色で塗り分ける方法は，A→B→C→D→E と塗ると考え，

$3\times 2^4 = 48$ (通り)

(2) 塗り方が左右対称となるのは，C の塗り方が 3 通りで，B, A がそれぞれ 2 通りずつ，また D, E は 1 通りに決まるので，その塗り方は，

$3\times 2^2 = 12$ (通り)

(3) 青色と緑色で塗り分けるのは，A→B→C→D→E と塗ると考え，その塗り方は，

$2\times 1^4 = 2$ (通り)

(4) 赤色で塗られる正方形が 3 枚であるのは, A, C, E が赤色のときで 1 通りと決まり，B, D が青色または緑色の 2 通りずつとなるので，その塗り方は，

$2^2 = 4$ (通り)

(5) どちらかの端の正方形 1 枚だけが赤色に塗られるのは，それが A の場合は，B が青色または緑色の 2 通りとなり, C, D, E は 1 通りずつである。また，赤色に塗られるのが E の場合も同様なので，合わせて，

$2\times 1^3 + 2\times 1^3 = 4$ (通り)

また，端以外の 1 枚が赤色に塗られるのは，それが B の場合は，A, C が青色または緑色で 2 通りずつとなり，D, E は 1 通りずつである。また，赤色に塗られるのが C または D の場合も同様なので，合わせて，

$2^2\times 1^2 + 2^2\times 1^2 + 2^2\times 1^2 = 12$ (通り)

よって，赤色に塗られる正方形が 1 枚である場合の塗り方は，

$4+12=16$ (通り)

(6) (3)～(5)から，赤色に塗られる正方形が 0 枚，1 枚，3 枚であるのは，それぞれ 2 通り，16 通り，4 通りであり，また(1)から，すべての塗り方は 48 通りなので，赤色に塗られる正方形が 2 枚である塗り方は，

$48-(2+16+4)=26$ (通り)

［解 説］

場合の数だけで，確率に関する設問はありません。また，数え上げもさほど難しくはなく，丁寧な誘導で最後の(6)につながるように構成されています。

第５問

問題のページへ

(1)　$a=756=2^2\cdot3^3\cdot7$ より，a の正の約数の個数は,

$$(2+1)\times(3+1)\times(1+1)=24$$

(2)　$\sqrt{am}$ が自然数となるのは，$am=2^2\cdot3^3\cdot7m$ が平方数の場合より，最小の自然数 m は $3\times7=21$ である。

また，$\sqrt{am}$ が自然数となるとき，m はある自然数 k によりm $m=21k^2$ と表され,

$$\sqrt{am}=\sqrt{2^2\cdot3^3\cdot7\cdot21k^2}=2\cdot3^2\cdot7k=126k$$

(3)　1 次不定方程式 $126k-11l=1$ ……①を満たす特殊解を求めるために, 126 と 11 に互除法を適用すると，右のようになる。

$$\begin{array}{r|r|r} & 2 & 11 \\ 5) & 11) & 126 \\ & 10 & 11 \\ & 1 & 16 \\ & & 11 \\ & & 5 \end{array}$$

ここで，$p=126$，$q=11$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると，

$$\begin{array}{r|r|r} & 2 & 11 \\ p-11q) & q) & p \\ & 2p-22q & 11q \\ & -2p+23q & p-11q \end{array}$$

$$-2p+23q=1,\ -2\times126+23\times11=1$$

よって，$126\times(-2)-11\times(-23)=1$ ………②

①②より，$126(k+2)-11(l+23)=0$

$$126(k+2)=11(l+23)$$

ここで, 126 と 11 は互いに素なので，n を整数として,

$$k+2=11n,\ l+23=126n$$

すなわち，$k=11n-2$，$l=126n-23$ と表せる。

すると，k が最小の自然数のときは $n=1$ となり，$(k,\ l)=(9,\ 103)$ である。

(4)　$\sqrt{am}=126k$ が 11 で割ると 1 余る自然数となるとき，k は不定方程式①を満たす。その解で最小のものは, (3)より $k=9$ であり，このとき m も最小となるので,

$$am=(126\cdot9)^2,\ 2^2\cdot3^3\cdot7m=(2\cdot3^2\cdot7\cdot3^2)^2$$

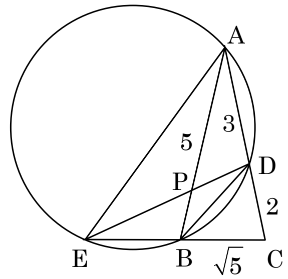
よって，$m=3^5\cdot7=1701$ となる。

［解 説］

誘導に従っていくと，設問(4)の m の値が求まってきます。なお, (3)の不定方程式の特殊解は山勘では見つかりそうにないので，互除法を利用しました。

第６問

問題のページへ



まず，方べきの定理より，

$$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CB}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CD}=5\times 2=10$$

よって，$\mathrm{CE}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{BE}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

これより，点 B は線分 EC の中点となり，$\triangle\mathrm{ACE}$ の重心を G とすると，G は線分 AB を $2:1$ に内分するので，

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\mathrm{AB}=\frac{10}{3}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ECD}$ と直線 AB に対して，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PE}}=1\text{，}\quad\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{EP}}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{EP}}=\dfrac{3}{5}$ ………①

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{EDC}$ において，$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{CED}$ かつ $\angle\mathrm{C}$ は共通より，

$$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{EDC}$$

これより，$\mathrm{BA}:\mathrm{DE}=\mathrm{AC}:\mathrm{EC}$ となり，$\mathrm{DE}=\dfrac{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{EC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{5\cdot 2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$ ………②

①②より，$\mathrm{EP}=\dfrac{5}{3+5}\mathrm{DE}=\dfrac{5}{8}\cdot 2\sqrt{5}=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$ である。

［解 説］

平面図形についての有名な定理の応用です。内容は基本的ですが，図がフリーハンドでは描きにくいという特徴をもっている問題です。なお，よく見れば，$\triangle\mathrm{EDC}$ も二等辺三角形でしたが……。