

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 連立方程式

$$(*) \begin{cases} 2^{x-2} + \frac{1}{2}y = 3 \\ x - \log_{\sqrt{2}} y = 2 \end{cases}$$

を満たす実数 x, y を求め、さらに $x + y$ 以下の整数のうちで最大のものを求めよう。

真数の条件により $y > \boxed{\text{ア}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

まず、 $z = 2^x$ とおくと、 $(*)$ は

$$\begin{cases} z + \boxed{\text{イ}}y = \boxed{\text{ウエ}} & \dots\dots\dots ① \\ \log_2 z - \log_{\sqrt{2}} y = 2 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

次に、 $w = \log_{\sqrt{2}} y$ とおくと、 $y = (\sqrt{2})^w$ である。この等式において、2 を底とする両辺の対数をとることにより、 $w = \boxed{\text{オ}} \log_2 y$ であることがわかる。したがって、②は

$$z = \boxed{\text{カ}} y^{\boxed{\text{キ}}} \dots\dots\dots ③$$

と変形できる。

①と③を連立させた方程式を解いて、 $y > \boxed{\text{ア}}$ に注意すると

$$y = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \quad z = \boxed{\text{コ}}$$

となる。したがって、 $x = \log_2 \boxed{\text{コ}}$ である。

最後に、 $x + y = \log_2 \boxed{\text{コ}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ 以下の整数のうちで最大のものを求めよう。

$x = \log_2 \boxed{\text{コ}}$ について

$$\frac{n}{2} \leq \log_2 \boxed{\text{コ}} < \frac{n+1}{2}$$

を満たす整数 n は $\boxed{\text{サ}}$ である。したがって、 $x + y$ 以下の整数のうちで最大のものは $\boxed{\text{シ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 座標平面において、原点 O を中心とする半径 5 の円 C と、 C の外部にある第 1 象限の点 A を考える。 A から C に引いた 2 本の接線の接点を P 、 Q とする。ただし、 P の x 座標が Q の x 座標より小さいとする。 $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ であり、かつ直線 PQ の傾きが $-\frac{4}{3}$ であるとき、点 A の座標と接点 P 、 Q の x 座標を求めよう。

(1) 円 C の方程式は $x^2 + y^2 = \boxed{\text{スセ}}$ である。

(2) $\angle OAP = \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ であるので、 $OA = \boxed{\text{タチ}}$ である。また、直線

OA と直線 PQ は垂直であるから、直線 OA の傾きは $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

よって、 A の座標は $(\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}})$ である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(3) 直線 OA と直線 PQ の交点を R とおくと、 $OR = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるの

で、点 R は線分 OA を $1 : \boxed{\text{ネ}}$ に内分する。このことを用いると、

直線 PQ の方程式は $y = -\frac{4}{3}x + \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ となることがわかる。

円 C の方程式と直線 PQ の方程式により、 P の x 座標と Q の x 座標は、それぞれ

$$\frac{\boxed{\text{フ}} - \boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}}{2}, \quad \frac{\boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}}{2}$$

であることがわかる。

第2問 (必答問題) (配点 30)

座標平面上の放物線 $y = 1 - x^2$ を C とする。

- (1) 放物線 C 上の点 $P(a, 1 - a^2)$ における C の接線を ℓ とする。 ℓ の方程式は

$$y = - \boxed{\text{アイ}} x + a \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}$$

である。直線 ℓ と原点 O の距離 h は

$$h = \frac{a \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}}{\sqrt{\boxed{\text{オ}} a^2 + \boxed{\text{カ}}}}$$

である。ここで、 $t = \sqrt{\boxed{\text{オ}} a^2 + \boxed{\text{カ}}}$ とおくと

$$h = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}} \left(t + \frac{\boxed{\text{ク}}}{t} \right)$$

と表される。相加平均と相乗平均の関係により、 h は $t^2 = \boxed{\text{ケ}}$ のとき、つ

まり $a = \pm \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ をとることがわかる。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

- (2) $\frac{1}{2} < b \leq 1$ として、放物線 C 上の2点 $Q(-1, 0)$ と $R(1 - b, 2b - b^2)$

を通る直線を m とする。 m の方程式は

$$y = \boxed{\text{セ}} x + \boxed{\text{ソ}}$$

である。

C と直線 m で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} b^3 + b^2 - \boxed{\text{テ}} b + \frac{4}{3}$$

である。一方、 C と直線 m の $1 - b \leq x \leq b$ の部分、および直線 $x = b$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} b^3 + 2b^2 - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} b + \frac{2}{3}$$

である。よって、 S_1 と S_2 の和 S は

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} b^3 + 3b^2 - \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} b + 2$$

となる。

$\frac{1}{2} < b \leq 1$ のとき、 S の増減を調べると、 S は $b = \sqrt{\boxed{\text{フ}}} - \boxed{\text{ヘ}}$

で最小値をとることがわかる。

第3問 (選択問題) (配点 20)

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = -40, a_{n+1} = |4n - a_n| + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots \textcircled{1}$$

を満たしているとする。 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

(1) $a_2 = -\text{アイ}$, $a_3 = -\text{ウエ}$ であるので、最初の3項については

$$a_n \leq 4n \dots \textcircled{2}$$

が成り立っている。いま、初項から第 m 項まで $\textcircled{2}$ が成り立っているとする

と、 $n = 1, 2, \dots, m$ に対して、 $\textcircled{1}$ により

$$a_{n+1} - a_n = \text{オ} n$$

を満たす。よって、 $n = 1, 2, \dots, m+1$ に対して

$$a_n = \text{カ} n^2 - \text{キ} n - \text{クケ} \dots \textcircled{3}$$

と表される。ここで

$$\text{カ} n^2 - \text{キ} n - \text{クケ} > 4n$$

を満たす最小の自然数 n は コ であるので、 $n = 1, 2, \dots, \text{コ}$ の

とき、 a_n は $\textcircled{3}$ で定まる。また、 $a_{\text{コ}} = \text{サシ}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

(2) 以下、 $n \geq \text{コ}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。まず、このとき

$$a_n > 4n \dots \textcircled{4}$$

であることを数学的帰納法により確かめる。

[I] $n = \text{コ}$ のとき、 $a_{\text{コ}} = \text{サシ}$ であるので、 $\textcircled{4}$ が成り立つ。

[II] $k \geq \text{コ}$ として、 $n = k$ のとき $\textcircled{4}$ が成り立つと仮定する。 $\textcircled{1}$ によ

り $a_{k+1} = \text{ス} a_k - \text{セ} k$ であるので、 $a_{k+1} > 8k$ となる。ま

た、 $8k > 4(k+1)$ であるので、 $n = k+1$ のときにも $\textcircled{4}$ が成り立つ。

[I], [II] により、 $n \geq \text{コ}$ のとき、 $\textcircled{4}$ が成り立つ。

したがって、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ により

$$a_{n+1} = \text{ス} a_n - \text{セ} n \quad (n \geq \text{コ}) \dots \textcircled{5}$$

である。 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、 $\textcircled{5}$ により、 b_n と b_{n+1} は関係式

$$b_{n+1} = \text{ソ} b_n - \text{タ} \quad (n \geq \text{コ})$$

を満たし、この関係式は $b_{n+1} - \text{チ} = \text{ツ} (b_n - \text{チ})$ と変形

できる。 $b_{\text{コ}} = \text{テト}$ であるので

$$b_n = \text{ナニ} \cdot \text{ツ}^{n-\text{コ}} + \text{チ}$$

である。 $\textcircled{5}$ から、 $b_n = \text{ヌ} a_n - \text{セ} n$ なので、 $n \geq \text{コ}$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\text{ヌ}} (b_n + \text{セ} n) \\ &= \text{ネノ} \cdot \text{ツ}^{n-\text{コ}} + \text{ハ} n + \text{ヒ} \end{aligned}$$

である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

平面上の四角形OABCにおいて、 $|\vec{OA}|=2$ 、 $|\vec{OB}|=3$ 、 $|\vec{OC}|=1$ 、 $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ であるとする。点Pが

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \frac{5}{4} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

を満たしながら動くとき、三角形OCPの面積の最小値を求めよう。以下、 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OP} = \vec{p}$ とおく。

まず、点Pの動く範囲を考えよう。①は、 $(\vec{a} - \vec{p}) \cdot (\vec{b} - \vec{p}) = \frac{5}{4}$ であるから、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{ア}}$ に注意すると

$$|\vec{p}|^2 - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} = 0$$

と書き換えられる。これはさらに

$$\left| \vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\boxed{\text{エ}}} \right| = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

と書き換えられる。点Mを $\vec{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\boxed{\text{エ}}}$ となるように定めると、点Pは、

Mを中心とする半径 $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ の円周上を動く。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

次に、点Pと直線OCの距離について考えよう。直線OC上の点Hを $\vec{OC} \perp \vec{MH}$ となるようにとる。実数 t を用いて $\vec{OH} = t\vec{OC}$ と表すと、 $\vec{OC} \cdot \vec{MH} = \boxed{\text{カ}}$

であることから、 $t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。このとき、 $|\vec{MH}| = \frac{\boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$

であるから、点Pが①を満たしながら動くとき、点Pと直線OCの距離の最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる。

したがって、三角形OCPの面積の最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。